This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

AAT2293
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/15/88 R/DT 07/15/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG84-B56810
035/2: : |a (CaOTULAS)160190712
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Maroger, A.
245:00: |a Mathématiques --Philosophie --Histoire. |b Leçons critiques et historiques sur les fondements des mathématiques. |c Par A. Maroger, avec une préface de G. Milhaud.
260: : |a Paris, |b Vuibert et Nony, |c 1908.
300/1: : |a xv, 204 p. |c 23 cm.
650/1: 0: |a Mathematics |x Philosophy
650/2: 0: |a Mathematics |x History.
998: : |c KLB |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

Hosted by Google

Mathématiques — Philosophie — Histoire

LEÇONS CRITIQUES ET HISTORIQUES

SUR LES

FONDEMENTS
DES MATHÉMATIQUES

PAR

A. MAROGER

Ancien élève de l'Ecole normale supérieure,
Agrégé des Sciences mathématiques.

AVEC UNE

PRÉFACE

DE

G. MILHAUD

Agrégé des Sciences mathématiques, Professeur de Philosophie
à la Faculté des Lettres de Montpellier.

Toute notre dignité consiste dans la pensée. C'est de là qu'il faut nous relever, non de l'espace et de la durée.

PASCAL.

PARIS

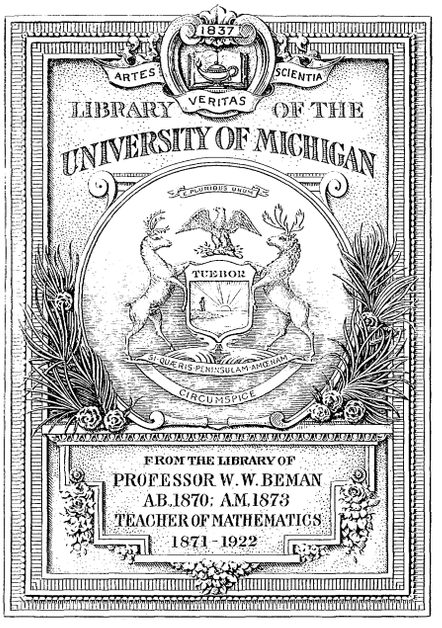
VUIBERT ET NONY ÉDITEURS

63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1908

(Tous droits de traduction et de reproduction réservés.)

Hosted by Google



Hosted by Google

FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES

Hosted by Google

Hosted by Google

Mathématiques — Philosophie — Histoire

LEÇONS CRITIQUES ET HISTORIQUES

SUR LES

FONDEMENTS
DES MATHÉMATIQUES

PAR

A. MAROGER

Ancien élève de l'Ecole normale supérieure,
Agrégé des Sciences mathématiques

AVEC UNE

PRÉFACE

DE

G. MILHAUD

Agrégé des Sciences mathématiques, Professeur de Philosophie
à la Faculté des Lettres de Montpellier.

> Toute notre dignité consiste dans la pensée. C'est de là qu'il faut nous relever, non de l'espace et de la durée.
>
> PASCAL.

PARIS

VUIBERT ET NONY ÉDITEURS

63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1908

(Tous droits de traduction et de reproduction réservés.)

Hosted by Google

Hosted by Google

A mes anciens Maîtres,

MM. G. MILHAUD et J. TANNERY,

en hommage de profonde reconnaissance et de grande admiration, je dédie ce modeste livre.

A. M.

Hosted by Google

Hosted by Google

PRÉFACE

En m'apportant les « bonnes feuilles » de votre livre, vous avez aimablement exprimé le désir de voir mon nom figurer à la première page, et vous m'avez demandé quelques mots d'introduction.

J'accepte avec plaisir parce que je crois bien comprendre ce que vous avez voulu faire et que j'applaudis à votre tentative.

Nous voici loin du temps où, dans notre université, philosophes et savants formaient deux catégories si distinctes de travailleurs, et donnaient par leur culture trop spéciale, une image si imparfaite de la réalité vivante de l'esprit humain telle qu'elle s'offre à nous dans l'histoire des idées.

Chargé d'un enseignement de Mathématiques aux élèves du lycée de Rennes, vous ne craignez pas de les faire réfléchir sur la plupart des problèmes philosophiques que soulèvent la méthode et la logique des sciences qu'ils étudient avec vous.

Vous restez d'ailleurs éloigné de toute prétention. C'est par des causeries familières, sur un ton qui ne veut rien avoir de dogmatique, et sur un programme dont les éléments parfois imprévus ne répondent pas à un plan solennellement arrêté d'avance, que vous retenez l'atten-

Hosted by Google

tion de vos jeunes gens, et que vous les instruisez doucement, — apportant parfois des vues originales —, empruntant toujours au cours de mathématiques des exemples fort ingénieux et fort clairs, et profitant de toutes les occasions pour parler des grands philosophes.

Assurément, et vous vous en doutez, vous présentez çà et là sur leurs doctrines des affirmations à propos desquelles je vous chicanerais volontiers...

Mais pourrais-je vous reprocher de ne pas attendre, pour être utile, d'avoir consacré de longues années à devenir un historien consommé de la philosophie ?

Si seulement vous inspirez à vos lecteurs le désir de lire et de connaître davantage les penseurs avec qui vous avez commencé de les familiariser, vos efforts ne seront pas perdus.

Tel qu'il est, sous sa forme quelque peu primesautière, avec l'ingéniosité, la curiosité intelligente que vous y avez apportées, avec le tour personnel que vous lui avez donné, ce livre sera utile aux élèves de nos lycées, ... et à beaucoup d'autres.

Je lui souhaite la bienvenue et tout le succès qu'il mérite.

G. MILHAUD.

Hosted by Google

AVANT-PROPOS DE L'AUTEUR

Comment vous remercier convenablement d'avoir écrit une préface à ce livre, quand je sais à quel point l'honore toute l'autorité qui s'attache à votre nom ?

Et comment oserais-je, après vous avoir imposé l'étude si consciencieuse de mon ouvrage, vous demander encore de lire son histoire, si je ne me sentais pas fort de l'intérêt sympathique que vous portez à votre ancien élève ?

L'idée m'en est venue, à Rennes, où je suis en effet chargé d'un cours de mathématiques destiné aux élèves de la classe de Philosophie de notre lycée, j'entends, à ceux dont le bagage scientifique est suffisant pour leur permettre de tirer profit de ce nouvel enseignement.

Je me suis inspiré de deux paragraphes du programme imposé, mais qui, dans la pensée même de ses auteurs, veut être largement et non strictement appliqué.

Ce programme assigne au maître « de contribuer au développement philosophique de ses élèves en leur faisant acquérir des idées importantes », et lui recommande en outre « d'introduire dans son enseignement quelques notions historiques ».

Tout de suite je me suis heurté, pour chacun de ces deux points, à une difficulté qui lui est propre.

Voici la première.

Vous connaissez, mieux que moi certes, l'importance verbale des termes du langage philosophique, et savez combien il est dangereux de ne pas assez tenir compte de la « valeur des mots ».

Hosted by Google

Ajoutez à cela que certains d'entre eux n'ont pas toujours la même acception, selon que s'en servent mathématiciens ou philosophes, et vous comprendrez mon embarras, pour justement développer le jugement philosophique de mes élèves au moyen d'idées logiques importantes, que renferme la Mathématique.

Par bonheur, je me suis souvenu à propos d'un aveu sur sa méthode de travail, révélé par *Sully Prudhomme*.

Au début d'un de ses articles « Définitions fondamentales », ce poète-philosophe a en effet écrit : « Curieux de philosophie, j'ai pratiqué divers ouvrages qui font autorité. J'ai fini par m'en assimiler le langage bien que je me sois exposé à me méprendre sur le sens que les spécialistes attachent à certains mots abstraits ou généraux, car ils ne me paraissent pas tous attribuer la même signification à chacun de ces mots. Le souci m'est venu de savoir avec précision ce que je dis quand j'en use. »

Puis l'auteur se crée, en vue d'études ultérieures, une terminologie qu'il s'efforce d'établir avec le plus de précision possible.

Je ne pouvais mieux faire que de suivre son conseil et d'imiter son exemple, et votre absence de critiques à cet égard me semble prouver que je n'y ai pas trop maladroitement réussi.

Arrivons maintenant à l'autre obstacle, le plus difficile à franchir.

Comme vous venez de le dire si nettement vous-même, le temps n'est plus où, dans la grande famille d'intellectuels scientifiques de notre université, de toute université, philosophes, savants (mathématiciens ou physiciens) restaient farouchement dans leurs domaines respectifs, cantonnés dans une spécialisation excessive et parfois intransigeante.

Ne semble-t-il pas que l'on se soit à temps ressaisi et que l'on médite à présent, avec une meilleure disposition d'esprit, la forte pensée cartésienne : « Toutes les sciences réunies ne sont rien autre chose que l'intelligence humaine, toujours une, toujours la même, si variés que soient les sujets auxquels elle s'applique » !

Au surplus ne paraît-il pas téméraire d'aborder les œuvres

Hosted by Google

des grands philosophes, où abondent les images mathématiques, sans être au préalable utilement armé ?

Quoi qu'il en soit, ni vous ni moi ne contreviendrons à ce vœu que je vis formuler un jour : « Quel intérêt prendraient l'arithmétique et la géométrie, si l'on joignait un peu de leur histoire à l'exposition de leurs principales théories, si l'on assistait aux efforts des *Pythagore*, des *Platon*, des *Euclide*, ou, plus tard, des *Viète*, des *Pascal*, des *Leibniz* ? Les nombreux théorèmes au lieu d'être des abstractions mortes et anonymes deviendraient des vérités vivantes, humaines, ayant leur histoire, comme une statue qui est de *Michel-Ange*, comme un tableau qui est de *Raphaël*. »

Ce vœu aura apparemment pris corps, car depuis l'époque rebelle où *Auguste Comte* sollicitait en vain la chaire de l'Histoire générale des sciences, dont il proposait la création au Collège de France, un grand pas favorable a été fait dans cette voie.

D'abord, la chaire est créée. Puis, avec les travaux des historiens scientifiques, tant en France qu'à l'étranger, — et je ne puis me défendre de songer aux vôtres ! — avec les livres nouveaux, les thèses, les fréquents articles sur la matière, nos étudiants et nos professeurs auront de quoi satisfaire leur curiosité.

Oui, mais cette Histoire générale des sciences, telle que la rêvait *Auguste Comte* et telle qu'elle nous est désormais constituée, ne se trouve-t-elle pas encore dans un état d'origine en quelque sorte anarchique ?

Et le disciple de Comte, *Littré*, croyait-il si bien dire lorsqu'il déclarait, il y a déjà un demi-siècle, en vantant les services que le positivisme est susceptible de rendre : « Jusque-là qu'ont pu être les prétendues histoires des sciences, sinon une collection laborieuse de faits, qui maintenant attend la véritable critique » ?

Aussi, même en limitant mon ambition, parmi l'Histoire de la philosophie, en général, à celle de la philosophie mathématique, en particulier, ai-je été la première victime de cet état anarchique,

Hosted by Google

et il m'a fallu par moments choisir entre des interprétations diverses de tel ou tel fait historique (1).

Quant à de certaines affirmations sur nos grands philosophes auxquelles vous faites allusion, je reconnais loyalement le bien-fondé de votre reproche, déplorant seulement que votre ancien état de santé m'ait imposé la réserve de ne pas solliciter votre collaboration éclairée.

Et certes, je n'ai garde d'affecter à mon usage personnel la fameuse devise : *De omni re scibili* (2), à laquelle j'aurais trop peur que quelque plaisant ajoutât : *et quibusdam aliis* (3) !

L'histoire de ce livre, que je considère sans fausse modestie comme une mise au point de quelques questions à l'ordre du jour, une fois terminée, m'accorderez-vous un nouveau crédit d'attention et consentirez-vous à me suivre au devant d'une ou deux objections qu'un lecteur averti pourrait soulever ?

Pourquoi, me dira-t-on, puisque votre ouvrage se pique d'être au courant des idées du moment, pourquoi se contente-t-il, deci de-là, d'une allusion timide au grand effort logique moderne aboutissant à ce qu'on nomme l' « École des logisticiens », en se taisant sur leur *graphie* dont le graphisme mathématique ne serait qu'un cas particulier ? Et ignore-t-il que le logicien anglais M. *Russell* a soutenu l'opinion suivante : « Le fait que toutes les mathématiques sont une logique symbolique est une des plus grandes découvertes de notre époque (4) » ?

A ceci je répondrai qu'il existe des idées mathématiques résistant singulièrement à l'emprise de tout symbole et que le moule

(1) C'est ainsi que dans la première leçon, le *Discours sur les passions de l'amour* reste attribué à *Pascal*. Bien que cette attribution soit fort controversée à l'heure actuelle, la question de l'authenticité du *Discours* ne semble point définitivement tranchée, comme l'est, pour prendre un exemple contemporain d'histoire littéraire, celle du lieu de naissance de *Cyrano* de Bergerac, qui naquit ..... à Paris.

(2) « De toutes les choses qu'on peut savoir », devise de *Pic de la Mirandole*, philosophe italien du XV^e^ siècle, précoce autant que prétentieux.

(3) « Et de quelques autres. »

(4) « The fact that all mathematics is symbolic logic is one of the greatest discoveries of our age. » *B. Russell : Principles of Mathematics*.

Hosted by Google

graphique destiné à les emprisonner n'est pas de sitôt fondu, heureusement !

Puis abordons la deuxième objection, autrement subtile.

Puisque vous essayez, dirait-on également, de donner les règles de la démonstration mathématique et que vous avez le désir d'apprendre à raisonner juste, dans la Science exacte, pourquoi, à côté de la *Logique démonstrative*, ne pas étudier la *Logique de l'invention ?*

Cette fois, la question a des racines plus anciennes, si l'on songe à l'*ars inveniendi*, cher à *Leibniz*.

Et M. *Couturat*, admirateur zélé du philosophe allemand, expliquerait volontiers l'accord des deux logiques par une sorte d' « harmonie préétablie ».

A la vérité, si tant est que l'expression de logique de l'invention ne soulève pas déjà de contradiction interne, — à mon sens, il vaudrait mieux dire : psychologie de l'invention, — toute invention ne paraît pas devoir être soumise à aucune loi, encore moins à aucune règle.

L'inventeur mathématique possède une sorte d'intuition propre, de génie spécial, ou, si le mot de génie effraie par son ampleur, il possède tout au moins un don véritable, analogue au don poétique par exemple, essentiellement imaginatif.

Personne ne contestera cette affirmation, que je veux consolider par deux témoignages. D'autant plus qu'ils montreront par contre-coup le rapprochement assez inattendu entre la Mathématique et la Poésie.

L'un de ces témoignages, le grand mathématicien allemand *Weierstrass* nous le fournit, dans une de ses lettres, par le reproche suivant : « ils ne possèdent pas une imagination suffisante (je devrais plutôt dire intuition), et il est certain qu'un mathématicien qui n'est pas quelque peu poète ne sera jamais un mathématicien complet. »

L'autre appartient à M. *Anatole France*. Le brillant écrivain, poète à ses heures, s'est jadis confessé de choses « qui faisaient travailler son imagination et développaient en lui cette faculté

Hosted by Google

sans laquelle on ne trouve rien, même en matière d'expériences et dans le domaine des sciences exactes. »

Or, en face d'un pareil don imaginatif, l'éducateur mathématique se trouve désarmé, ou plutôt le don n'a cure de l'éducation.

Je ne sais plus qui a exprimé que « l'éducation est l'art de faire passer le conscient dans l'inconscient [1] ». Et précisément ce terme d'*inconscient* dont la fortune est si fraîchement accréditée auprès des psychologues contemporains, que l'on pourrait à la rigueur rapprocher du terme *infini*, de fortune si diverse parmi les mathématiciens anciens ou modernes, n'évoque-t-il point une région encore fort mystérieuse de l'être humain, proche voisine du domaine où règne le *conscient*, de même que l'infini s'apparente au *fini* dans la création des êtres mathématiques ?

Eh bien ! c'est dans l'inconscient qu'il faut placer vraisemblablement le siège de toute découverte intellectuelle ; à la suite de quels phénomènes psychiques ? je reste en droit de l'ignorer.

Enfin si l'éducation ou plus proprement l'instruction de la logique inventive, qui procède, je viens de le signaler, de l'inconscient, était un art comme on a soutenu que l'éducation, au sens commun du mot, en était un, quel recours aurions-nous dans l'exercice de cet art ? Un art ne s'apprend pas, le métier seul exige un apprentissage.

Au surplus, si mon lecteur, mal convaincu par les raisons précédentes, déplore que ce petit livre ne lui assure de rien découvrir des richesses mathématiques futures, qu'il veuille bien se reporter à un article récent et combien curieux de l'éminent savant M. *Henri Poincaré* : *L'Invention mathématique* [2], et il sera, j'imagine, à jamais édifié... !

Mais j'ai abusé de votre attention, veuillez m'en excuser. Permettez-moi seulement, dans ma gratitude, d'associer à votre

---

[1] Phrase liminaire de l'ouvrage de *Gustave Le Bon : Psychologie de l'Education.*
[2] Cf la *Revue générale des sciences,* année 1908.

Hosted by Google

nom déjà célèbre, celui de mon ancien maître, le logicien-mathématicien universellement connu, M. *Jules Tannery*, et celui de M. *Moritz Cantor*, le réputé historien des mathématiques, dont la bonne grâce me fut activement précieuse pour mener cet ouvrage à bonne fin.

Hosted by Google

Hosted by Google

FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES

INTRODUCTION

PREMIÈRE LEÇON

MÉTHODE OBJECTIVE, MÉTHODE SUBJECTIVE

Avant d'aborder en détail chacune de ces leçons, il me semble opportun de vous indiquer dans quel esprit elles seront conçues. Et surtout je veux, dès maintenant, vous signaler deux points de vue nettement distincts, desquels nous aurons à juger sans cesse, par la suite. Ils se présenteront essentiellement à nous quand nous nous occuperons, plus tard, des notions fondamentales de l'analyse mathématique.

Pour enseigner ces *notions fondamentales*, je ne dis pas : les mathématiques dans leur ensemble, il existe deux *méthodes*, ou, au sens étymologique du mot, deux voies qui conduisent au but proposé. Je les appellerai, en me servant de deux épithètes qui vous sont familières en philosophie : la méthode *objective* et la méthode *subjective*.

Quelques exemples vous en feront saisir la différence :

1° Supposons qu'on ait acquis la notion de nombre *entier* et qu'on veuille dès lors définir la *fraction*. Au point de vue de la méthode objective, nous ferons appel à une *grandeur mathématique*, au segment de droite, pour simplifier ; nous lui adjoin-

Hosted by Google

drons le segment-unité, disons l'unité pour abréger; nous partagerons, par la pensée, l'un en a, l'autre en b segments égaux au $b^{\text{ème}}$ de l'unité, et nous appellerons fraction ce système des deux entiers a et b. Nous choisirons du reste une notation graphique $\frac{a}{b}$ qui devra nous rappeler que le segment en question vaut a $b^{\text{èmes}}$ d'unité.

Au point de vue de la méthode subjective, sans faire appel à aucune grandeur, nous dirons aussitôt : une fraction est un couple de deux entiers. La notation pourra, si on veut, être la même que précédemment, mais sans rappeler aucune signification *concrète*.

2° Soit la multiplication de deux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, exactement, la formation de leur *produit*.

Dans le premier cas, nous aurons recours à la représentation sensible, que nous procurent les deux segments correspondant aux fractions proposées. Avec l'un d'eux, nous imaginons, visuellement au moins, qu'on constitue un nouveau segment, de la même façon que l'autre est constitué avec l'unité. Il est ensuite facile de voir qu'il correspondra à la fraction nouvelle $\frac{aa'}{bb'}$, laquelle sera le produit cherché.

Dans le deuxième cas, nous supprimons tout intermédiaire géométrique et nous prenons de suite la fraction $\frac{aa'}{bb'}$ comme définition même du produit.

3° Soit enfin à définir le nombre *incommensurable* ou *irrationnel*.

Si nous sommes « objectivistes », je veux dire, si nous jugeons du point de vue de la méthode objective, nous nous adressons à un segment de droite non représentable par un entier ni par une fraction, appelé segment incommensurable avec l'unité, comme est par exemple la diagonale d'un carré avec son côté. Nous lui substituons des segments approchés, les uns plus petits, les

Hosted by Google

autres plus grands que le proposé, qui *tendent* indéfiniment vers lui, donc les uns vers les autres, mais toujours commensurables avec l'unité. Il y correspond deux suites indéfinies, ou *infinies*, dit-on dans le même sens, de nombres entiers ou de fractions, nommés nombres commensurables d'ailleurs, qui sont dits les valeurs approchées par défaut et par excès de ce nombre incommensurable qu'il s'agit de créer en tant que *symbole numérique* de la *grandeur* incommensurable envisagée. En outre, d'après l'image sensible fournie par notre représentation géométrique, ce nouveau nombre sera envisagé comme la *limite* de ses valeurs approchées. Bien entendu, avant de faire intervenir ces nombres incommensurables au même titre que les commensurables dans les opérations, dans les calculs, il faudra à chaque fois justifier leur emploi : le *passage à la limite*, pour employer une expression connue, due à **Newton**, ne sera possible qu'à cette condition. Enfin, vous observerez que cette création objective d'un pareil nombre présuppose l'existence de grandeurs incommensurables. Or il existe de pareilles grandeurs et c'est ce que **Pythagore** avait déjà mis en évidence en étudiant la diagonale du carré.

Si maintenant nous jugeons en « subjectivistes », nous nous laissons peu influencer par des considérations historiques, nous n'acceptons plus le secours de l'imagination visuelle, nous rejetons même le nom d'incommensurable que nous remplaçons par irrationnel, celui de commensurable par rationnel, et nous n'avançons que prudemment dans ce domaine qui, vous vous en êtes douté, est celui de *l'infini*. Notre objet principal est alors de définir nettement les deux suites de nombres rationnels nécessitées. Pour cela nous supposons formés tous les nombres rationnels possibles, depuis les plus petits jusqu'aux plus grands et nous indiquons une *loi* de leur séparation. Mais prenons un exemple. Soit le nombre entier 2. Nous classons dans une première suite, disons *classe*, tous les nombres rationnels possibles dont les carrés sont plus petits que 2. Dans une autre classe nous mettons tous les nombres rationnels dont les carrés sont plus grands que 2 (on sait, d'autre part, qu'il n'y en a aucun dont le carré est 2) ;

Hosted by Google

cette loi de séparation bien définie produit dans l'ensemble des nombres rationnels possibles une *coupure*, d'après le langage actuel. C'est cette coupure qu'il importe de considérer dans la définition présente du nombre irrationnel, qu'on dira correspondre à la coupure. Remarquons qu'on ne peut pas encore affirmer que le carré de ce nouveau nombre, puisque nombre il y a, est précisément 2. Pour s'en assurer, il faudra d'abord étendre l'opération de multiplication, exactement, celle de puissance du second ordre, à ce symbole formel ainsi défini, que l'on pourra écrire $\sqrt{2}$ seulement après ces considérations préliminaires. Quant à la notion de limite, elle devra également, dans cette méthode subjective, résulter d'un traitement spécial, d'une définition précise.

Ces exemples, que nous retrouverons plus tard, auront eu aujourd'hui le mérite de caractériser à vos yeux les deux méthodes objective et subjective des mathématiciens élaborant les premières notions de leur science. La première a forcément, historiquement parlant, précédé l'autre ; elle s'adresse davantage aux sens, à *l'intuition sensible*, dirait un philosophe. La deuxième, plus abstraite, ne procède que de *l'entendement* ; elle est moins accessible peut-être que sa rivale, mais bien plus rigoureuse, purement formelle. C'est cette méthode subjective que l'on tend à employer de préférence dans ce domaine encore si mystérieux de l'infini, auquel nous avons fait allusion, et que tant de chercheurs explorent de nos jours, avec, présente à leur esprit sans doute, la forte pensée de **Renan** : « L'humanité n'arrive à la vérité que par des erreurs successives ».

Mais soyez sans crainte, au cours de ces leçons il s'agira le plus souvent du *fini* et, dans son domaine, le choix des deux méthodes n'aura pas une importance excessive, ne nuira pas, en tout cas, à la clarté. Nous suivrons toujours l'ordre historique, l'exposition de chaque notion sera faite d'après la voie objective, puis suivie d'une exposition parallèle par voie subjective, quoique plus brièvement. Même, nous attendrons d'avoir épuisé un certain ensemble de notions, de combinaisons de ces notions, avant de les reprendre. De plus, chaque leçon comportera une partie

Hosted by Google

critique et une partie *historique*. La partie critique sera destinée à exercer votre jugement philosophique. La partie historique aura un double but. D'abord elle vous permettra de faire connaissance avec des mathématiciens célèbres à divers titres, et aussi avec des philosophes fameux qui se sont adonnés à la *Mathématique*, à la *Géométrie* comme on disait jadis plus volontiers, à l'exemple de **Pascal**. Ensuite elle vous permettra de suivre, en quelque sorte, le développement de telle ou telle idée, de tel ou tel concept mathématique jusqu'à sa signification actuelle.

Et volontiers, quand nous aborderons chaque notion primordiale, nous nous placerons au point de vue le plus élémentaire possible, nous prendrons des exemples *numériques*, concrets pour ainsi parler, quitte à pénétrer par gradations successives dans les extensions *littérales*, plus abstraites, de manière à repasser par les mêmes étapes, je ne dis pas : les mêmes erreurs, où est passée la Mathématique.

Nous nous élèverons ainsi, insensiblement, à ce degré de généralisation, d'abstraction, qui lui est propre, qui caractérise au reste toute vraie science et que connaissaient bien ces immortels penseurs **Platon** et **Aristote**, quand ils formulaient sous des formes à peine différentes : « Il n'y a de science que du général. »

Certes, le temps qui nous est consacré pour cette étude en commun étant limité, nous la limiterons également et nous la diviserons en deux parties. La première partie comprendra quelques leçons de *généralités*, qui vous habitueront à raisonner sur les *premiers principes* des mathématiques. Je me propose dans ce sujet délicat, de faire quelquefois appel à cette branche de la philosophie encore fraîche à votre mémoire et qui se nomme la *Logique*, mais sans vouloir m'y inféoder le moins du monde et seulement par commodité.

Ces premières leçons seront, si vous le voulez, des leçons de *philosophie mathématique*.

La deuxième partie, plus technique, envisagera les *Notions fondamentales des mathématiques*, dans leur conception actuelle.

Hosted by Google

Elle comportera surtout la *Théorie des nombres*, tant arithmétique qu'algébrique, et, après une étude indispensable de la *Fonction*, elle pénétrera dans le champ si vaste désormais de l'*Analyse infinitésimale*. En un mot elle s'occupera de l'*Analyse mathématique*, comme on dit, en restant le plus souvent dans ce qu'on appelle « le domaine du nombre pur ». Mais j'aurai recours à l'occasion, quoique rarement, à vos souvenirs de géométrie proprement dite, pour examiner sans trop de lenteur certaines branches mixtes, telles l'*Arithmétique géométrique* et la *Géométrie analytique*. Par ailleurs les théories ne présenteront pas de lacunes.

A la vérité, je ne me soucie guère de vous entraîner dans la région des fondements de la Géométrie, région si explorée mais encore obscure pour le moment. Quelque défaveur semble en effet s'attacher aux premiers principes de l'ancienne géométrie classique, celle d'**Euclide**, le géomètre grec d'avant notre ère que vous vous garderez de confondre avec son homonyme, le philosophe de Mégare.

Enfin de temps à autre une digression opportune nous permettra de préciser tel ou tel sujet particulier, par exemple d'insister sur une question d'histoire.

Et pour inaugurer, même dans cette leçon préparatoire, le plan général qu'elle renferme, voici de brèves considérations critiques et des notes historiques.

Critique.

On désigne sous les noms de « intuitifs » et « logiciens », ou bien de « géomètres » et « arithméticiens », ou alors de « empiristes » et « idéalistes », les mathématiciens que nous avons nommés : *objectivistes* et *subjectivistes*. Nous avons évité les premières expressions pour des motifs divers que vous comprenez sans peine et, au risque d'être critiqué à notre tour, nous avons employé les deux dernières qui, quoique peu courantes sinon

Hosted by Google

inconnues en philosophie, vous rappellent toutefois les termes d'objectif et de subjectif, d'objectivité et de subjectivité, rendus classiques par **Kant** et l'*école critique*.

Bien entendu vous ne vous méprendrez pas sur la forme du mot « objectif ». Sa compréhension ne devra pas éveiller dans votre esprit une image d'objet matériel, une vision d'expérience effective, mais bien plutôt une image intuitive, une représentation d'objet idéal de pensée. Du reste *Kant* différenciait par deux mots allemands distincts, que le français ne traduit que par un seul malheureusement, les deux acceptions du mot objet. Il appelait « Gegenstand » tout objet matériel quelconque, traduisible par un certain phénomène, et « Object » cette espèce d'objet idéal qui est le transformé du premier, une fois perçu par le « sujet pensant » qui applique au phénomène ses formes *a priori*. C'est ainsi que ce philosophe a pu dans ses *Prolégomènes* définir l'objectivité : la nécessité et l'universalité d'une proposition.

Du reste si vous préférez, reportez-vous à **Schopenhauer** et à sa doctrine de la représentation de l'objet par le sujet.

Ainsi entendez toujours le terme objectif dans son sens idéalisé en quelque sorte, comme l'entendait au demeurant **Descartes**, dont le langage philosophique, vous l'avez peut-être remarqué, n'usait pas du terme subjectif.

Histoire.

Bornons-nous à deux ou trois noms rencontrés aujourd'hui ; nous reviendrons par la suite sur les autres.

Platon, né en 427 ou 429, mort en 348 avant Jésus-Christ, fut un disciple de *Socrate*. Il fonda, à Athènes, l'école appelée « Académie. » Plus grand philosophe que grand mathématicien, il ne dédaigne pourtant pas les mathématiques, comme avait fait son maître (1) ; après avoir étudié celles léguées par les Pythagori-

(1) Socrate estimait qu'il suffisait de « savoir assez de géométrie pour mesurer son champ ».

Hosted by Google

ciens, il exerce sur celles de son temps une réelle influence. Au cours de son œuvre, consignée dans les *Dialogues*, il raisonne avec une certaine complaisance sur les grandeurs incommensurables.

Enfin, et bien qu'il faille se mettre en garde contre la tradition, on lui attribue généralement le concept, fondamental en géométrie, du *lieu géométrique*.

Aristote est né en 384 et mort en 322 avant Jésus-Christ. Son génie fut véritablement encyclopédique. D'abord entier partisan des idées de *Platon*, il fondera plus tard la célèbre école du « Lycée » ou « péripatéticienne ». Ami de la vérité sous toutes ses formes, de la vérité qu'il voulait préférer à l'amitié d'un *Socrate* ou d'un *Platon*, s'il n'est pas un créateur en Mathématique, (il aurait composé cependant un *Traité de Mathématiques* qui ne nous est point parvenu), il l'est au contraire en Logique, en Physique, en Histoire naturelle et même en Histoire de la philosophie. Sa logique, renfermée dans son grand ouvrage l'*Organon*, et qui sera déjà combattue par **François Bacon**, puis perfectionnée par **Leibniz**, par **Euler**, enfin battue fortement en brèche par l'école des logiciens modernes, n'en reste pas moins classique à beaucoup d'égards. En revanche sa *Physique* fut irrévocablement détrônée par celle de *Descartes*, vite délaissée à son tour. Sa *Mécanique*, trop inexacte, n'eut pas une longue autorité et ne souffre aucune comparaison avec celle d'**Archimède**. Quant à son système philosophique, le « péripatétisme », il convient de l'étudier dans la partie de ses écrits qu'on appelle sa *Métaphysique*. Ce terme vient d'une expression due à un commentateur : « μετὰ τὰ φυσικὰ βιβλία » et qui signifie : livres après la physique. D'ailleurs *Aristote* lui-même concevait plus ou moins son système comme devant expliquer à la pensée le monde physique. S'il demeure surtout grand comme philosophe, il serait injuste cependant d'oublier qu'il eut, le premier sans doute, le mérite de représenter par des lettres les grandeurs que considère la mathématique. Bien qu'imparfaite alors, cette

Hosted by Google

idée aura précédé le symbolisme littéral de la grandeur, plus systématique et plus rationnel et dont **Viète** s'immortalisera à la fin du XVIe siècle.

Blaise **Pascal** est né à Clermont-Ferrand, en 1623, et mort à Paris, en 1662, prématurément. Son génie, aussi encyclopédique que celui d'*Aristote*, est plus mathématique. A la fois moraliste, écrivain, il excelle encore en physique et surtout en géométrie. On connait sa précocité vraiment surprenante en cette matière. La légende que crée sa sœur, Mme *Périer*, qui fut en même temps son biographe, nous le montre à l'âge de douze ans parvenant de lui-même à la trente-deuxième proposition d'*Euclide*, à savoir : la somme des angles d'un triangle vaut deux angles droits. C'est ce fait que l'imagination romantique de *Chateaubriand* a grossi dans ces termes : « Il y avait un homme qui, à douze ans, avec des barres et des ronds avait créé les mathématiques ; qui, à seize, avait fait le plus savant traité des coniques qu'on eût vu, depuis l'antiquité, etc... ». Quoi qu'il en soit et sans pouvoir demander à *Chateaubriand* s'il avait connu beaucoup d'ouvrages géométriques depuis l'époque grecque jusqu'à *Pascal*, nous extrairons du *Traité sur les sections coniques* auquel il vient d'être fait allusion, un théorème qui trouve de nombreuses applications en géométrie supérieure. On l'appelait autrefois « hexagramme mystique » et son nom actuel est « hexagone de Pascal ». Soit une conique, c'est-à-dire la section plane d'un cône, et un hexagone inscrit : les trois points de rencontre des côtés opposés sont en ligne droite.

En arithmétique, *Pascal* fut également un novateur. On lui doit aussi le *Calcul des probabilités* : il en jeta les premières bases concurremment avec **Fermat**. Il est à remarquer que « l'esprit géométrique » dont il parle souvent, qu'il oppose en particulier à « l'esprit de finesse », dans son *Discours sur les passions de l'amour*, doit être entendu dans le sens d'esprit mathématique en général. Il dira, dans ce sens : « Ce qui passe la géométrie nous surpasse ». Nous retrouverons sans cesse, surtout dans nos leçons

Hosted by Google

de philosophie mathématique, ce savant extraordinaire. Mais je vous engage, vous qui connaissez certainement ses *Provinciales* et ses *Pensées*, à lire avec soin son petit opuscule communément intitulé : *De l'esprit géométrique*, auquel on se reporte si souvent et qui est un chef-d'œuvre de pensée philosophique.

Hosted by Google

PREMIÈRE PARTIE

DEUXIÈME LEÇON

DÉDUCTION, PRINCIPE D'IDENTITÉ, ROLE DE L'INDUCTION, PRINCIPE D'INDUCTION COMPLÈTE.

Occupons-nous, dès aujourd'hui, des fondements mêmes de la science mathématique ou, pour parler en philosophe, de ses *premiers principes*. Vous avez souvent entendu nommer cette science, la *science déductive* par excellence, tandis que la Physique, par exemple, vous apparaissait plutôt comme une *science inductive*. Vous savez encore qu'elle tire tous ses développements, toutes ses propositions, du plus petit nombre possible de principes initiaux qui, suivant le degré de leur évidence plus ou moins grande, s'appellent *axiomes* ou *postulats*. Enfin, sachez que le critérium de la légitimité des vérités, des créations de cette science, est l'*absence de contradiction*.

Aristote déjà en faisait le caractère de la vérité ; et le moyen le plus sûr d'atteindre à la *rigueur mathématique* sera justement d'éviter la contradiction. Il est par conséquent indispensable de préciser ces diverses notions, ainsi que d'autres complémentaires du reste. Ce sera là le but principal de la première partie de nos leçons. Pour commencer, nous traiterons de la déduction, de l'induction, et de deux principes qui s'y rapportent.

Qu'est-ce d'abord que la déduction ?

Hosted by Google

Empruntons dans ce but quelques exemples à la logique et aux mathématiques proprement dites.

1° Soit le *syllogisme* suivant dû à *Leibniz* :

Tout homme est un animal, or un animal est une substance, *donc* tout homme est une substance.

2° Soit l'ensemble de trois nombres a, b, c, en arithmétique ou en algèbre, peu importe, et la *proposition* suivante : a égale b, or b égale c, *donc* a égale c.

3° Soit encore un ensemble de trois nombres a, b, c, mais réels pour qu'on puisse les comparer entre eux (on ne fait pas en effet la comparaison des nombres imaginaires) et la proposition que voici :

a est plus grand que b, or b est plus grand que c, donc a est plus grand que c.

4° Soit enfin un triangle ABC et la proposition qui suit :

L'angle A est égal à l'angle B, or si un triangle a deux angles égaux les deux côtés opposés aux angles égaux sont égaux, *donc* le côté BC est égal au côté AC.

Dans ces quatre exemples la proposition totale énoncée se compose de trois parties, de trois *jugements*, et le dernier jugement, celui qui commence par la conjonction « donc », et qu'on nomme la *conclusion*, est déduit des deux premiers appelés *prémisses*. C'est ce jugement de conclusion qui constitue la *déduction* proprement dite, précisément. Comment découle-t-il des deux prémisses ? Comment en est-il une conséquence ? Et ce mot de conséquence vous rappelle qu'on substitue parfois à la conjonction « donc » la conjonction double « par conséquent ». Il en découle, le plus souvent, par *démonstration*. Dans certains cas la démonstration est superflue, pour ne pas dire impossible à faire. C'est qu'il s'agit alors d'un principe évident, d'un axiome, comme cela se présente pour les deux premiers exemples, pour le deuxième en tout cas, si l'on veut éviter par cette restriction la critique qu'un mathématicien intransigeant soulèverait, en soutenant que la démonstration ne peut avoir de prise en logique. Dans

Hosted by Google

tout autre cas au contraire et le plus fréquemment la démonstration est nécessaire, elle permet seule de conclure.

Bien que nous nous réservions d'étudier une autre fois le mécanisme de la démonstration mathématique, donnons cependant celle relative au troisième exemple. Employons pour plus de rapidité les signes habituels. Il faut prouver que si on a

$$a > c \quad \text{et} \quad b > c, \quad \text{on en déduit} \quad a > c.$$

En effet, dire $a > b$, c'est dire $a = b + d$, où d est la différence positive de a et de b.

De même l'inégalité $b > c$ est équivalente (et cette expression « équivalente » contracte la phrase qu'on ferait, pareille à la précédente), est équivalente à l'égalité $b = c + d'$, où d' est un nombre positif.

Donc, par *substitution* de $c + d'$ à la place de b, on peut écrire

$$a = c + d' + d,$$

qui montre que la différence entre a et c étant le nombre positif $d' + d$, on obtient l'inégalité équivalente $a > c$.

Et c'est ce qu'il fallait démontrer.

Nous profiterons de cette occasion d'ailleurs, pour indiquer déjà que le fondement essentiel de la démonstration consiste à substituer à des *expressions*, ou même à des grandeurs mathématiques, d'autres expressions, d'autres grandeurs équivalentes. Ce fondement, les logiciens l'appellent : principe, nous préférons dire : *loi de la substitution des équivalents*.

Ajoutons que dans le cas où a, b, c sont des nombres arithmétiques, correspondent si on veut à des grandeurs, *Euclide* qui ne se souciait guère de définir comme nous faisons aujourd'hui la notion de « plus grand que » aurait postulé sous le nom de « demande », de postulat peut-on traduire, la proposition en question.

Quant à la quatrième proposition citée, elle réside essentiellement dans le deuxième jugement dont la fin représente la conclusion, somme toute. On peut abréger son énoncé et formuler :

Hosted by Google

si un triangle a deux angles égaux, il est isoscèle. Vous vous rappelez sa démonstration qui consiste à réaliser la coïncidence des éléments égaux en retournant le triangle sur lui-même. Nous l'avons choisie pour donner un exemple de *proposition hypothétique*, si fréquente en mathématiques et que décèle l'emploi du si conditionnel.

Cela examiné, de quel principe initial et qui mérite ce nom est tributaire toute proposition, toute démonstration déductive ? Eh bien, c'est *du principe d'identité ou de contradiction*. Ce principe se trouve à la base de toute connaissance logique, de toute pensée rationnelle. Il peut se formuler, dans sa forme générale, de la sorte : « Une chose est, et ne peut pas ne pas être ». Sous une forme condensée il devient: « A est A, et n'est pas non A ». Sous sa forme mathématique, nous l'écrirons : « $A = A$ et $A \neq B$ », dès que B n'est pas justement A.

Ce principe affirme cette loi indispensable de la pensée qu'un objet, d'ordre quelconque d'ailleurs, une fois pensé reste identique à lui-même, quel que soit le moment où on se place dans le cours du temps, et ne se confond pas avec un autre objet qui ne serait pas lui.

Il a un caractère d'évidence absolue, pour ne pas dire que c'est l'évidence idéale elle-même. Bien entendu c'est un axiome et le plus sûr des axiomes. Sa première partie, $A = A$, fournit le principe d'identité proprement dit ; sa deuxième partie $A \neq B$, fournit celui de contradiction.

Passons maintenant au concept de la contradiction, à deux notions contradictoires, à deux propositions contradictoires.

1° Considérons, à la suite du philosophe logicien anglais **Hamilton** du reste, la notion de « mortel ». La notion contradictoire, et non pas seulement contraire, sera « non-mortel », c'est-à-dire « immortel ».

2° Considérons la proposition de logique : « Tous les hommes sont mortels ». La contradictoire sera : « Tous les hommes sont immortels ».

3° Soit la notion mathématique de « plus grand que ».

Hosted by Google

Sa contradictoire sera à la fois « plus petit que » et « égal à ».

4° Soit encore la notion arithmétique de « nombre pair ». La contradictoire sera uniquement « nombre impair ».

5° Soit enfin la proposition de géométrie : « Si dans un triangle ABC, dont on désigne pour abréger par a, b, c les côtés opposés aux angles A, B, C, on a $a > b$, on a aussi $\widehat{A} > \widehat{B}$ ». La proposition contradictoire serait : « Si on a $a > b$ on a aussi $\widehat{A} < \widehat{B}$ ou bien $\widehat{A} = \widehat{B}$ ».

Or une loi essentielle de la raison, c'est que : *deux notions contradictoires ne peuvent s'appliquer au même objet et en même temps*, et que : *deux propositions contradictoires ne peuvent être vraies à la fois.*

Leibniz avait déjà remarqué dans sa *Théodicée* que : « De deux propositions contradictoires, l'une est vraie, l'autre fausse ». Ainsi un homme ne peut être en même temps mortel et immortel ; un nombre n'est pas à la fois pair et impair ; on ne peut pas assurer que, en même temps, tous les hommes sont mortels et tous immortels ; on ne peut pas énoncer que si $a > b$ on a, à la fois, $\widehat{A} > \widehat{B}$ et $\widehat{A} < \widehat{B}$ ou $\widehat{A} = \widehat{B}$.

De plus nous présenterons la remarque très importante qu'il ne faut pas confondre le concept du contradictoire avec celui du *contraire*. Ainsi le contradictoire de « blanc » sera « non-blanc » tandis qu'un contraire serait, par exemple, « rouge ». Pour « plus grand que » il y a deux contraires : « plus petit que », « égal à », dont l'ensemble constitue son contradictoire. Voici l'utilité de cette remarque.

La loi précédente est *réciproque*, c'est-à-dire que deux propositions contradictoires, pour nous en tenir au cas à peu près exclusif des propositions, ne pouvant être vraies à la fois, ne peuvent pas non plus réciproquement être *fausses* à la fois. Si l'une est vraie, l'autre est fausse, et *vice versa* si l'une est fausse, l'autre est vraie.

Exemple :

« Tous les hommes sont immortels », ce qui est faux ;

« Tous les hommes sont mortels », ce qui est vrai.

Hosted by Google

Autre exemple :

« 4 est un nombre impair », ce qui est faux ;

« 4 est un nombre pair », ce qui est vrai.

Au contraire, bien que la loi : *deux propositions contraires ne peuvent être vraies à la fois* existe elle aussi, elle n'est pas réciproque. Et, en effet, deux pareilles propositions peuvent être fausses à la fois.

Exemple :

« Tous les objets sont blancs », ce qui est faux ;

« Tous les objets sont rouges », faux également.

Autre exemple :

« 6 est plus grand que 8 », faux ;

« 6 est égal à 8 », faux également.

On aura donc soin de distinguer le contradictoire du contraire si l'on veut éviter, en mathématique comme en logique, les *paralogismes*, je veux dire les erreurs de raisonnement qu'on a trop de tendance à y commettre, malheureusement.

Arrivons enfin au rôle de l'*induction* en mathématiques.

Vous n'ignorez pas qu'affirmer cette loi physique : l'eau bout à cent degrés, dans des conditions toujours comparables bien entendu, c'est faire une induction, c'est *induire* d'un nombre considérable d'expériences le fait en question. De même indiquer que le soleil se lèvera demain, que demain il fera jour, c'est induire cette assertion d'une foule d'observations antérieures. Mais prenons des faits mathématiques cette fois.

Considérons d'abord la suite des nombres

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ldots$$

contenant les carrés des entiers consécutifs, y compris 0. Retranchons chacun d'eux du suivant et écrivons les résultats

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ldots$$

Nous constatons qu'au début de cette nouvelle suite apparaissent quelques entiers impairs, consécutifs d'ailleurs. Va-t-on désormais en conclure que l'opération indiquée se traduirait toujours, si on la poursuivait indéfiniment, par la même propriété de fournir des entiers impairs consécutifs ? Non pas, un

Hosted by Google

tel jugement serait absolument inacceptable en mathématiques et *Leibniz*, à qui nous devons l'exemple choisi, faisait remarquer qu'il était peu digne d'un vrai mathématicien de conclure de la sorte intuitivement, *inductivement* tout au moins. La meilleure preuve, c'est qu'un pareil raisonnement par induction conduirait à une erreur si l'on s'en servait pour affirmer le fait suivant. Partons en effet de l'expression

$$2^{2^n}+1$$

étudiée par *Fermat*. Pour de petites valeurs de l'entier n, telles que 1, 2, 3 par exemple, elle fournit des nombres premiers. Le fait général, à savoir : pour n quelconque le nombre obtenu est premier peut-il s'affirmer ? Non, et dès qu'on fait $n = 5$, l'expression fournit un nombre non premier, comme l'a constaté tout d'abord *Euler*. Aussi *Fermat*, qui avait affirmé le fait en question ne devait pas connaître à cet égard de *démonstration déductive*. Il devait conclure un peu au hasard, en se fiant à l'analogie avec d'autres exemples sans doute. La seule excuse de ce savant, que nous aurons l'occasion de voir si grand par ailleurs, tient à ce que les nombres constitués dans l'application de l'expression précédente sont tout de suite énormes. On s'en rendra compte en essayant de former le nombre $2^{32}+1$ qui correspond à $n = 5$.

De même utilisons l'expression

$$1\times 2\times 3\times 5\times 7\times 11\times\cdots\times p+1,$$

où le produit initial renferme les entiers premiers absolus consécutifs jusqu'à p, y compris. Si l'on choisit pour p les entiers 1, 2, 3, 5 l'expression donne 2, 3, 7, 31 qui sont premiers. Va-t-on assurer que, quel que soit p, on en tirera un nombre premier ? Non encore, et pour $p = 13$ on constate, facilement cette fois, que l'entier calculé n'est pas premier.

Mais si nous revenons au premier exemple, celui de *Leibniz*, la propriété signalée est cependant mathématiquement vraie. Nous la démontrerons en utilisant, sous la première forme où il se présente, un procédé de raisonnement particulier, qui porte

Hosted by Google

tantôt le nom de *raisonnement par récurrence*, tantôt de *raisonnement par induction* ou même par *induction complète*. Pourtant — et nous allons le voir — le raisonnement est purement déductif. Certains auteurs le déclarent inductif. Pour fixer les idées nous l'appellerons : *procédé par récurrence*, en nous réservant de préciser bientôt ce que nous entendons par « principe d'induction complète ». Voici donc le mécanisme de ce procédé — première manière —. Admettons pour abréger qu'on sache que l'entier impair de rang n soit $2n-1$. Notre première suite, si nous explicitons les termes de rangs n et $n+1$, s'écrit

$$0,\quad 1,\quad 4,\quad 9,\quad \ldots,\quad (n-1)^2,\quad n^2,\quad \ldots$$

La différence entre les deux termes en question est

$$n^2-(n-1)^2=n^2-(n^2-2n+1)=n^2-n^2+2n-1=2n-1,$$

donc justement l'entier impair de rang n. De sorte que la nouvelle suite formée par soustraction des termes consécutifs de la première sera

$$1,\quad 3,\quad 5,\quad \ldots,\quad 2n-1,\quad \ldots$$

Désormais notre esprit est rassuré, cette suite comporte tous les nombres impairs successifs. La propriété de formation de ces nombres est générale, elle a toujours lieu. En douterait-on qu'il suffirait pour dissiper le moindre doute de raisonner ainsi. Cette propriété est vraie au début pour $n=1$, de plus elle est également vraie pour une valeur quelconque de n, donc elle est *toujours* vraie. En d'autres termes, si on imagine un entier de l'arithmétique, aussi grand qu'on veut, le procédé de récurrence actuel s'appliquera jusqu'à lui.

Mais envisageons le procédé — deuxième manière — car c'est sous une forme plus classique que se présente la démonstration. Démontrons, à cet effet, que la somme des carrés des n premiers nombres entiers peut se représenter par l'expression

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

autrement dit qu'on a l'égalité

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Hosted by Google

La proposition que traduit cette égalité est d'abord vraie pour $n = 1$, comme on constate aussitôt.

Prouvons ensuite qu'en *admettant* qu'elle soit vraie pour $n = m$, c'est-à-dire en admettant par hypothèse l'égalité

$$(1) \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6},$$

la proposition reste encore vraie pour $n = m+1$, c'est-à-dire qu'on aura l'égalité

$$(2) \quad 1^2+2^2+3^2+\cdots+m^2+(m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

En effet, en vertu de (1), acceptée pour vraie, (2) s'écrira

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6},$$

ou
$$\frac{m(2m+1)}{6} + (m+1) = \frac{(m+2)(2m+3)}{6},$$

ou
$$m(2m+1) + 6(m+1) = (m+2)(2m+3),$$

ou
$$2m^2 + 7m + 6 = 2m^2 + 7m + 6.$$

Par suite la vérité de (2) est assurée par celle, évidente, de cette dernière égalité, son équivalente.

Montrons enfin que la proposition est toujours vraie.

En effet, elle est vraie pour $n = 1$, or elle est vraie pour $n = m + 1$ dès qu'elle est vraie pour $n = m$, donc elle est vraie pour $n = 2$, puis pour $n = 3$, puis pour $n = 4$,..., indéfiniment. Quel que soit un entier n formé ou seulement pensé, aussi grand soit-il, ce procédé de démonstration par récurrence l'atteindra fatalement. Le mot de récurrence s'explique d'ailleurs parce qu'on revient en arrière en quelque sorte, au nombre 1, à partir du nombre quelconque n, dans le raisonnement.

Eh bien, nous n'avons rien rencontré qu'on puisse qualifier d'inductif au sens de la loi physique citée, par exemple. Le jugement de conclusion a été obtenu par voie purement déductive, tout comme nous avons démontré que $a > c$, si on a $a > b$ et $b > c$; c'est par suite un *jugement déductif*.

Hosted by Google

L'école logique moderne appelle *principe d'induction complète* le fondement essentiel du procédé de démonstration par récurrence, le principe qui permet de conclure en toute raison. On l'énonce habituellement ainsi :

« Si une propriété (relative à des entiers) est vraie pour 1, et si étant vraie pour n, elle l'est pour $n + 1$, elle est toujours vraie. »

Ainsi présenté, ce principe n'a rien que de déductif ; nous verrons, la prochaine fois, d'autres conditions où le mot d'induction est mieux à sa place.

Hosted by Google

TROISIÈME LEÇON

(*Suite de la précédente.*)

Critique et histoire.

Nous devons compléter aujourd'hui la leçon précédente sur la déduction et l'induction, sur les premiers principes de la connaissance mathématique, par sa double partie critique et historique.

Pour la déduction d'abord, qui est la caractéristique de la science mathématique, pour le principe d'identité et de contradiction qui est l'axiome par excellence, tous les penseurs qui se sont occupés de ces questions *métaphysiques*, pour dire le mot, sont très sensiblement d'accord.

Aristote, avons-nous vu, est le fondateur de la logique. Ce nom λογικὴ, en grec, venant de λόγος, discours, a été donné par les stoïciens à la *science du raisonnement*. Le grand penseur étudia dans le *Traité des Analytiques*, qui fait partie de l'*Organon*, la théorie du syllogisme, par suite celle de la déduction. Il formula le premier le principe de contradiction sous la forme suivante : « Le même attribut ne peut pas en même temps convenir et ne pas convenir au même sujet, considéré au même point de vue et sous le même rapport ». Il pouvait en déduire alors toute sa logique, qui se nomme véritablement la *logique déductive*.

René *Descartes*, grand philosophe et non moins grand mathématicien, né à La Haye, en Touraine, en 1590, mort à Stockholm, en 1650, énonce dans ses *Meditationes de prima philosophia*, en qualité de principe à admettre sans preuve, « qu'une même

Hosted by Google

chose ne peut pas être et n'être point tout ensemble » : *quod idem non possit esse simul et non esse.*

Leibniz (Gottfried Wilhelm), le génial philosophe et puissant mathématicien allemand, qui vécut de 1646 à 1716, (il naquit à Leipzig et mourut à Hanovre), s'efforce constamment de ramener métaphysiquement toutes les vérités d'ordre scientifique au seul principe en question. Dans ses *Nouveaux essais sur l'Entendement humain*, il le formule ainsi : « Il est impossible qu'une chose soit et ne soit pas en même temps ». Mais il aura recours, ce que ne faisait pas *Descartes*, à un autre principe, celui de *raison*, pour des vérités d'ordre non purement mathématique. Nous y reviendrons dans un moment.

Kant (Emmanuel), le grand philosophe allemand de Kœnigsberg, qui enseigna un certain temps les mathématiques élémentaires comme du reste la physique élémentaire (sa vie s'étend de 1724 à 1804) manifeste quelque inquiétude au sujet du principe de contradiction. Que A soit A voilà certes qui est irrévocable, absolument, subjectivement vrai, mais que A puisse être B, dans certaines conditions, voilà qui est moins absolu. Si l'on ne veut pas piétiner sur place, rester dans une éternelle *tautologie*, ou répétition de mots peu productive, pour étendre le champ de la connaissance, l'esprit a besoin de passer outre sur le principe d'identité, il lui faudra opérer une sorte de *synthèse* pour asseoir la validité d'un jugement général, pour aller en un mot du « même » à « l'autre », du « semblable » au « dissemblable ». Cette inquiétude se révèle en particulier lorsqu'il émet : « Comment quelque chose peut résulter d'une autre chose en dehors de la *règle d'identité*, voilà ce que je voudrais bien qu'on m'expliquât. »

Il n'en admet pas moins le caractère de nécessité logique du principe de contradiction, mais, sans expliciter tout autre principe, il ne s'astreint pas uniquement à suivre la voie analytique, déductive je veux dire, et bâtit un système philosophique nouveau, le *criticisme*, qui s'appuiera sur ce qu'on a appelé son *synthétisme*.

Hosted by Google

Hégel, philosophe allemand du début du XIX^e^ siècle, continuateur de *Kant*, mais dont la doctrine est plus unitaire (il confondra l'esprit et la réalité, le rationnel et le réel), dont la pensée fut à la fois hardie et obscure, semble ne pas accepter le principe de contradiction comme une loi absolue de la connaissance. Aux termes de son système exposé dans son ouvrage capital *la Science de la logique* et qui est plus proprement un ouvrage de métaphysique, deux notions contradictoires la « thèse » et « l'antithèse » peuvent coexister, puis se fondre dans la « synthèse ». On y rencontre une formule qui l'a fait considérer comme un pur sophiste, à savoir : « L'être est identique au non-être ». Il ne faudrait pas pourtant s'exagérer cette conception de l'identité des contradictoires, en quelque sorte, même momentanée, car outre qu'il s'agit là de notions d'ordre complexe, primitivement indéterminées, exagérément métaphysiques, nous devons songer aux propres paroles de *Hégel*. « Je dois enseigner la philosophie, a-t-il écrit, et peut-être est-ce pour cela que je la tiens pour susceptible de devenir un édifice aussi régulier, aussi enseignable que l'est la géométrie. » Nous venons de dire qu'on l'a tenu pour un sophiste. C'est qu'en effet il rappelle par son esprit critique les « sophistes » classiques de l'antiquité. On s'est posé la question de savoir dans quelle mesure le criticisme de *Hégel*, de *Kant* lui-même, avait été préparé, s'était manifesté jadis, chez les philosophes hellènes. Sans insister sur ce sujet, indiquons brièvement qu'à la conception du philosophe grec *Parménide* (VI^e^ siècle avant J.-C.) savoir : « L'être est, le non-être n'est pas » s'oppose vite celle du « devenir », de la coexistence du même et de l'autre dans chaque être, conception du philosophe *Héraclite* (500 ans avant J.-C.) qu'on a surnommé l'*Obscur*. Un disciple de ce dernier, *Protagoras* (450 ans avant J.-C.) révoque en doute, nie même le principe de contradiction, et représente la sophistique grecque. Quant à *Platon* qui met aux prises dans ses célèbres dialogues du « *Parménide* » et du « Sophiste » ou du « *Protagoras* » les deux doctrines en présence, bien que sa pensée soit souvent obscure et ait été diversement interprétée, il a

Hosted by Google

vraisemblablement accordé quelque crédit à la notion de l'existence du non-être et penché vers le synthétisme.

Hamilton, philosophe écossais de la première moitié du XIX^e^ siècle, dont le livre *Lectures on Logic* fait autorité, et qu'il ne faudra pas confondre avec un mathématicien irlandais, son homonyme et son contemporain, nous semble un peu spécieux, lorsqu'il observe qu'on devrait appeler de préférence le principe en question : *principe de non-contradiction*.

Venons-en à l'induction maintenant.

Ici, et très nettement, l'accord n'existe plus, aussi bien dans le camp des mathématiciens que dans celui des philosophes. Le principe d'induction complète, auquel nous allons donner sa véritable signification, ainsi que nous l'avons annoncé la fois dernière, sera, en tant que principe inductif bien entendu, accepté par ceux que nous nommons les objectivistes et repoussé par les subjectivistes.

Nous avons, dans le procédé par récurrence, pu établir par déduction uniquement : qu'une propriété des nombres entiers, vraie pour l'entier 1, puis vraie pour $n+1$ dès qu'elle l'est pour n, autrement dit vraie pour l'entier n, quel qu'il soit, est toujours vraie. Mais prenons cette fois une propriété plus générale, ne s'appliquant pas seulement aux entiers mais aussi aux fractions, par exemple la propriété suivante : le produit de deux fractions est *commutatif*, je veux dire ne change pas quand on change l'ordre des facteurs. Et essayons de l'étendre aux nombres incommensurables ou irrationnels.

Si nous sommes objectivistes, le nombre incommensurable se présente à nous comme un symbole de grandeur incommensurable avec l'unité, limite effectivement atteinte des fractions en double suite infinie qui en sont ses valeurs approchées. Si, songeant un moment aux grandeurs auxiliaires qui fournissent ces nombres, la raison nous objecte qu'il est assez malaisé de concevoir une grandeur incommensurable en tant que limite effective d'une grandeur variable mais sans cesse commensurable, nous prenons vite pour nous rassurer l'image sensible d'un point mo-

Hosted by Google

bile sur une droite, en coïncidence successivement avec les extrémités du segment égal à la diagonale d'un carré, par exemple, et des segments approchés, celui en particulier égal au côté du carré. Puis nous raisonnons comme il suit. Le produit de deux nombres incommensurables sera défini comme un nombre, incommensurable en général, limite des nombres commensurables en double suite infinie qui sont les produits des fractions, valeurs approchées respectivement par défaut et par excès des incommensurables proposés. Et en effet on aura constaté au préalable que ces produits tendent indéfiniment les uns vers les autres, les premiers, inférieurs aux derniers, en croissant constamment, les derniers en décroissant constamment, donc (1) *qu'ils tendent vers une limite unique commune*. Or pour tous ces produits de fractions, valeurs approchées du nombre nouveau : savoir le produit des incommensurables en question, la commutativité existe. Par suite cette propriété subsistant quelle que soit la valeur approchée du produit étudié, aussi rapprochée qu'on veut, subsiste *à la limite*. Pourtant notre raisonnement qui est déductif et qui est censé prouver la commutativité du produit de deux incommensurables, n'a pu être fait à la limite, lui, puisqu'il porte sans cesse sur les valeurs approchées du produit. Par conséquent le jugement de conclusion n'est pas un véritable jugement déductif ; il est bien plutôt induit que déduit ; il rappelle l'assertion qu'il fera jour demain parce qu'il a fait indéfiniment jour, les jours précédents. Nous l'appellerons *jugement inductif*. Ainsi, énoncer au sens objectiviste : le produit de deux incommensurables est commutatif, c'est énoncer un jugement inductif.

Mais plaçons-nous par contre au point de vue subjectiviste. Si nous sommes subjectivistes, le nombre incommensurable ou mieux irrationnel n'existe plus d'une façon intrinsèque, il ne mesure plus de grandeur, il évoque seulement la loi de séparation des nombres rationnels en deux classes, il symbolise cette *coupure*

(1) Voilà le point faible dans cette vue objectiviste : cette conclusion de la limite unique est élémentairement admise comme postulat.

Hosted by Google

dont nous avons parlé. Considérer le produit de deux nombres irrationnels, c'est alors considérer une nouvelle coupure en deux classes, dans lesquelles on classera les produits respectifs des nombres rationnels relatifs aux deux coupures proposées. Or tout produit de nombres rationnels est commutatif. Donc les classes de la coupure nouvelle, et par suite la coupure elle-même, ne dépendent pas de l'ordre des deux nombres irrationnels considérés.

Cette fois le raisonnement est purement déductif et le jugement de conclusion également. Mais il ne porte plus sur un nombre véritable, comme l'était l'incommensurable vis-à-vis des nombres commensurables. Le mathématicien subjectiviste — observons-le dès maintenant — ne s'inquiète pas de savoir ce qui se passe à la limite. Quand il parlera de limite, elle ne sera pas forcément atteinte, comme le faisait remarquer le mathématicien et logicien **Duhamel**, au siècle dernier (1).

Cela compris, on voit mieux ce qu'il convient d'entendre par principe d'induction complète, qui reste constamment un principe de déduction aux yeux d'un subjectiviste et ne devient vraiment un principe d'induction pour l'objectiviste qu'autant qu'il est généralisé, qu'il ne s'applique plus à une propriété de nombres entiers mais de nombres incommensurables.

Quant à la différence de position des mathématiciens modernes à ce propos, elle tient à leur façon de comprendre l'*infini*. La question de l'infini est loin d'être tranchée, et nous la retrouverons, le cas échéant, avec toutes ses difficultés. Pour les objectivistes qui passent volontiers à la limite, l'infini est atteint positivement. Pour les subjectivistes qui évitent de le faire, l'infini ne peut être atteint ; il est plus exactement l'*indéfini* qui comporte une idée négative de nombre entier qui, dans la suite des entiers successifs, par exemple, ne saurait être le dernier. Les uns consi-

(1) Voir la façon toute formelle dont on définit actuellement la notion de nombre irrationnel, de limite, dans l'ouvrage de M. BAIRE : *Leçons sur les théories générales de l'Analyse*. Voir aussi ce que l'auteur appelle le « principe d'extension », à propos de la commutativité d'un produit de nombres irrationnels.

Hosted by Google

dèreront aisément une tangente à une courbe, pour fixer les idées, comme la limite une fois atteinte d'une sécante mobile et useront du jugement inductif pour découvrir quelque propriété de la tangente. Les autres répugneront à toute interprétation géométrique, ou s'ils y consentent ce sera avec des restrictions conscientes.

Signalons enfin pourquoi nous avons employé l'expression de jugement inductif, de préférence à celle de « jugement synthétique *a priori* », qui se trouve sous la plume de M. **Henri Poincaré**, plus ou moins en bonne place d'ailleurs, dans son livre *la Science et l'Hypothèse*. Cette deuxième expression, due à *Kant*, nous l'évitons, car nous aurons à éviter dans ces leçons les mots de synthèse, d'analyse, qui comportent des sens dissemblables d'après l'usage qu'en font mathématiciens ou philosophes. Nous verrons en temps opportun comment nous y suppléerons. Au surplus, l'épithète de *a priori* a été trop controversée pour nous sembler bonne. En choisissant notre expression, nous nous sommes malgré tout rapproché d'**Auguste Comte**, le fameux philosophe positiviste qui s'occupa tant de mathématiques et vécut de 1798 à 1857. *Comte*, en parlant de postulat, disait, en effet que c'était une « proposition inductive ». Et justement le principe d'induction complète, sous sa forme généralisée où il donne lieu à un jugement inductif, n'aura pas l'évidence essentielle d'un axiome. Plutôt que de s'imposer de lui-même, il devra être postulé. C'est un véritable postulat.

Voilà quel est le débat des mathématiciens dans cette question de logique, de *logique inductive* surtout, puisqu'il s'agit d'induction. Nous allons le retrouver, agrandi, chez les philosophes qui furent en même temps mathématiciens ou logiciens.

L' « incomparable *Aristote* », le « prince éternel des penseurs » pour parler comme *Auguste Comte*, discute déjà le syllogisme inductif suivant : « Le cheval, l'âne, le mulet, etc... vivent longtemps ; or le cheval, l'âne, le mulet, etc... sont tous les animaux sans fiel ; donc tous les animaux sans fiel vivent longtemps ». Il fait remarquer que pour que la conclusion fût rigoureuse, au sens

Hosted by Google

de la rigueur déductive, il faudrait que l'énumération de tous les animaux sans fiel fût complète, ce qui n'a pas lieu.

Du reste son principe métaphysique bien connu ; ἀνάγκη στῆναι », à savoir : « Il faut s'arrêter quelque part », lui interdisait toute véritable induction formelle.

François Bacon fait fi le premier du syllogisme d'*Aristote*, de ses principes généraux et *a priori* de la connaissance que renferme l'*Organon*. Il rompt avec la tradition scolastique du Moyen âge, qui est entièrement aristotélicienne, et inaugure une sorte de *philosophie naturelle* où, cette fois, la connaissance prend appui sur l'observation, sur l'expérience et où les principes sont établis *a posteriori*. Son ouvrage essentiel, le *Novum Organum*, paru en 1620, indique assez, par le titre même, qu'il a remplacé par l'induction la déduction si chère au philosophe grec.

Ce système, l'*empirisme*, encore confus chez *Bacon*, a été repris, en particulier au milieu du siècle dernier, par le philosophe anglais **Stuart Mill**. Celui-ci prétendait que chaque science, tout comme les sciences de la nature, emploie le raisonnement inductif. La déduction serait fausse ou se ramènerait à l'induction. En tous cas elle aurait pour point de départ une induction antérieure et ne serait que l'extension à des cas particuliers nouveaux d'une loi générale déjà posée. Il soutenait même que le syllogisme contient une pétition de principe, c'est-à-dire admet d'abord en principe ce qui fait l'objet de la conclusion et conclut en suite dans ce sens.

Son livre *Système de logique déductive et inductive* fonde l'induction sur une loi de causalité universelle qui s'appuierait sur une association immuable des idées.

Descartes, avant *Stuart Mill*, accusait à son tour le syllogisme.

Dans son célèbre *Discours de la Méthode*, qui date de 1637, et qui fut écrit en français tandis que jusqu'alors la tradition imposait le latin, il lui reproche d'être impuissant « à apprendre ». Dans ses *Regulæ ad directionem ingenii*, l'avant-coureur de la *Méthode*, il fait remarquer que « les dialecticiens ne peuvent

Hosted by Google

former aucun syllogisme qui conclut le vrai, sans avoir connu d'avance la vérité que ce syllogisme développe ». Ailleurs enfin, dans une de ses lettres de polémique, de ceux qui remplacent le jugement par l'imagination et qui pour soutenir une opinion, quelque invraisemblable qu'elle soit, se servent de lieux communs pour construire leurs preuves, il dira, pour montrer le peu de portée de ces preuves, qu'on n'a fait que les « habiller convenablement en syllogismes ». Mais trop mathématicien pour dédaigner la méthode déductive, il s'y attache lorsqu'il écrit, par exemple dans la *Méthode*, les lignes suivantes : « Ces longues chaînes de raisons toutes simples et faciles dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné occasion de m'imaginer que toutes les choses qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes s'entre-suivent en même façon et que, pourvu seulement qu'on s'abstienne d'en recevoir aucune pour vraie qui ne le soit et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les *déduire* les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées auxquelles enfin on ne parvienne ni de si cachées qu'on ne découvre ». Il accepte donc la déduction et naturellement le principe de contradiction, bien qu'il ne songe point à donner un nom à ce principe. Il semble vouloir y ramener toute connaissance, de quelque ordre que ce soit, à l'exemple des connaissances mathématiques. Sa tendance est de reporter en effet les sciences de la nature à la science exacte et plus généralement de rassembler toutes sortes de sciences en une seule « la mathématique universelle ». Il a été jusqu'à vouloir démontrer mathématiquement l'existence de Dieu, et sa « preuve ontologique », — vous savez qu'on appelle ainsi en philosophie toute soi-disant démonstration de l'existence divine —, il l'exposera dans ses *Méditations* et, comme il l'annonce sans sourciller, « à la manière géométrique », comprenez : à la manière syllogistique, déductive. Mais *Descartes*, s'il ne se soucie guère d'invoquer, en dehors du principe de contradiction, un principe jouant le rôle de celui d'induction complète, paraît en avoir par moments le besoin plus ou moins

Hosted by Google

conscient ; il sent apparemment que la déduction ne suffit pas à tout expliquer. Pour nous en rendre compte, rapportons-nous en effet à ses *Regulæ*. Il y distingue d'abord deux moyens essentiels « par lesquels notre entendement peut s'élever à la connaissance sans crainte de se tromper » : l'*intuition* et la déduction.

La déduction, il l'entend au sens habituel du mot. C'est l'opération par laquelle l'esprit tire « ou infère », si on veut, des conséquences les unes des autres ; qu'on peut ne pas faire, mais qui, si on la fait, ne saurait être mal faite, et qui caractérise « l'arithmétique et la géométrie de beaucoup plus certaines que les autres sciences ». Ces conséquences, ces déductions, comme il les nommait déjà pour désigner cette fois les résultats successifs de l'opération, sont d'ailleurs « déduites de principes vrais et incontestés par un mouvement continuel et non interrompu de la pensée ». Cette opération, ainsi expliquée psychologiquement par les *Regulæ*, constitue en somme le raisonnement déductif en général et la terminologie logique actuelle emploie le terme de *raisonnement discursif*, appelle sa marche progressive la *marche discursive*. Quant à l'intuition (le mot est nouveau, prévient *Descartes*), ce sera « la conception d'un esprit attentif, si distincte et si claire qu'il ne lui reste aucun doute sur ce qu'il comprend ». Elle sera également une manière de connaître, bien plutôt qu'une connaissance même « plus simple, donc plus sûre que la déduction elle-même », plus directe aussi, qui ne passera pas par l'intermédiaire du raisonnement. Tandis que les conséquences éloignées des principes ne sont connues que par déduction, les principes, eux, sont connus par intuition. Au fond, si nous y regardons de près, l'intuition sert de contrôle à la déduction et lorsque *Descartes*, dans la phrase de la *Méthode* citée ci-avant, voulant porter la méthode déductive dans le domaine de la connaissance en général, parle de s'abstenir de recevoir aucune connaissance pour vraie qui ne le soit véritablement, il fait allusion à l'intuition qui en contrôle l'évidence. De nos jours ce mot s'applique quelquefois à la connaissance même, connue

Hosted by Google

par intuition, mais a perdu sa marque de grande évidence que lui accordait son auteur.

Cependant la science pour être complète a besoin d'un autre moyen de connaissance. Ce moyen, c'est l'énumération ou l'induction : *enumeratio sive inductio*, écrivait *Descartes*. Avec cette énumération qu'il exige tantôt complète, tantôt simplement suffisante, n'allons-nous pas nous rapprocher de l'induction complète enfin ? Ne lui suffirait-il pas pour démontrer la commutativité d'un produit de deux nombres incommensurables, par exemple, d'énumérer auparavant tous les cas où la commutativité existe, savoir ceux où l'on substitue aux nombres leurs valeurs commensurables approchées, et ces cas étant en nombre infini, de conclure que le premier en est une conséquence ? D'autant mieux qu'il écrit encore ceci : « Mais si nous déduisons une proposition d'autres propositions nombreuses, disjointes et multiples, souvent la capacité de notre intelligence n'est pas telle qu'elle puisse en embrasser l'ensemble d'une seule vue : dans ce cas la certitude de l'induction doit nous suffire. »

Malheureusement les quelques exemples illustrant sa théorie nous dissuadent aussitôt. Voici l'exemple mathématique : « Si je veux montrer par énumération que la surface d'un cercle est plus grande que la surface de toutes les figures dont le périmètre est égal (constant), je ne passerai pas en revue toutes les figures, mais je me contenterai de faire la preuve de ce que j'avance sur quelques-unes et de le conclure par induction pour toutes les autres ». Certes il n'eût pas été embarrassé, j'imagine, de conclure que le nombre $2^{2^n} + 1$ précédemment étudié, était toujours premier parce qu'il l'est pour quelques valeurs de n. En résumé, faute d'une compréhension suffisante de l'infini mathématique, ou simplement faute d'y avoir songé, *Descartes* a méconnu le rôle de l'induction complète dans la science mathématique.

Avec *Leibniz*, plus averti que son devancier et en possession de sa doctrine, nous approcherons plus nettement du principe d'induction complète.

Hosted by Google

D'abord *Leibniz* tient davantage compte de la logique d'*Aristote* (il a toujours admiré le penseur grec). De cette logique qu'il a su perfectionner, il écrivait dans ses *Nouveaux essais*, qui datent de 1703, du reste, les lignes suivantes : « Et cependant je tiens que l'invention de la forme du syllogisme est une des plus belles de l'esprit humain et même des plus considérables. C'est une espèce de mathématique universelle dont l'importance n'est pas assez connue, et l'on peut dire qu'un art d'infaillibilité y est contenu, pourvu qu'on sache et qu'on puisse s'en bien servir ». En mathématiques il accepte essentiellement le principe de contradiction ; nous avons vu comment il l'énonçait. Mais dans le domaine des vérités contingentes, du réel, pour certaines questions de mécanique ou de physique, il invoque en outre, nettement et pour la première fois, son fameux *principe de raison* ou de *raison suffisante*, appelé aussi d'universelle intelligibilité. Il le formule en particulier au paragraphe 32 de sa *Monadologie* : « Aucun fait ne saurait se trouver vrai, ou existant, aucune énonciation véritable, sans qu'il y ait une raison suffisante, pourquoi il en soit ainsi et non pas autrement. » Il dira aussi : « Le grand principe des mathématiques est celui de la contradiction et il suffit à démontrer toute l'arithmétique et toute la géométrie, c'est-à-dire tous les principes mathématiques. » Observons qu'il ne parle pas ici du *Calcul infinitésimal* dont il fut notoirement un des premiers inventeurs, calcul dans lequel, de son temps surtout, on passait à la limite, dans lequel l'infini intervient forcément. Il ajoutera cependant : « Mais pour passer de la mathématique à la physique, il faut encore un autre principe, celui de raison suffisante. » Observons enfin qu'il rapproche volontiers son calcul infinitésimal de la Physique, qu'il lui applique son *principe de continuité* bien connu, considéré du reste comme un cas particulier de son principe de raison (nous y reviendrons plus tard), et demandons-nous en conséquence si ce grand principe métaphysique de raison, *Leibniz* ne le porte pas, au fond, dans la Mathématique ? Certes, après *Kant*, on a répété à satiété que non. Quoiqu'il en soit nous avons quelques raisons de croire à son besoin, plus ou moins

Hosted by Google

conscient, de deux principes en mathématiques. Et voici nos raisons.

D'abord *Leibniz* rapproche sans cesse la Métaphysique et la Mathématique. Ne dit-il pas, en termes explicites, qu'il veut que sa métaphysique « soit toute mathématique ou puisse le devenir » ? Il rapproche également la Métaphysique et la Physique quand il écrit : « Or par ce principe de raison suffisante seul se démontre la Divinité et tout le reste de la métaphysique et de la théologie naturelle et même, en quelque façon, les principes physiques indépendants de la métaphysique, c'est-à-dire les principes dynamiques ou de la force. » En outre, lui qui mettait si bien en garde contre l'emploi de l'induction imparfaite, ainsi que nous l'avons vu la dernière fois, pouvait certes sentir le besoin de l'induction parfaite, complète si on veut, en un mot du jugement inductif. Puis, pour revenir à l'époque naissante du calcul infinitésimal, à propos du *problème des tangentes* en particulier, on « passait à la limite », à l'exemple de *Newton*, tout comme de nos jours un mathématicien objectiviste à qui la déduction seule ne peut suffire. Donc, et bien qu'à son origine le calcul infinitésimal fût assez peu assuré, notre logicien pouvait là aussi sentir le besoin de l'induction complète. Laplace n'a-t-il pas émis plus tard, à propos de ce calcul qu'on désigne de même sous le nom d'*analyse infinitésimale*, l'opinion suivante : « L'analyse et la philosophie naturelle (entendez : la Physique) doivent leurs plus importantes découvertes à ce moyen fécond que l'on nomme induction » ? Ajoutons encore qu'on attribue à un contemporain de *Leibniz*, et son correspondant à l'occasion, **Jacques Bernoulli**, qui perfectionna le calcul infinitésimal, la paternité du principe d'induction complète (sous sa première forme, non généralisée). Donc notre philosophe pouvait très bien, pour justifier certaines règles de son calcul, invoquer le « principe de *Bernoulli* ». Enfin voici un dernier argument, positif cette fois. M. **Louis Couturat**, dans un livre récent, *la Logique de Leibniz*, a pu en se basant sur certains manuscrits du savant allemand, signaler chez lui une certaine indécision quand il veut employer

Hosted by Google

en mathématiques, en mathématiques appliquées surtout, le principe de contradiction tantôt seul, tantôt adjoint au principe de raison.

En résumé, même en mathématiques pures, dans le domaine de l'infini, *Leibniz* eût mérité notre épithète d'objectiviste, et il aurait vraisemblablement raisonné ainsi, pour établir la propriété signalée plus haut de la commutativité du produit de deux nombres incommensurables : cette propriété étant indéfiniment vraie pour les valeurs approchées du produit, il *n'y a pas de raison* pour qu'elle ne le soit pas, à la limite, pour le produit lui-même.

Voilà donc quelles sont, dans cet important débat métaphysique de la déduction et de l'induction considérées en science mathématique, les positions respectives de *Bacon*, de *Descartes*, de *Leibniz* pour nous rappeler seulement les « trois pères systématiques de la philosophie », ainsi que disait *Auguste Comte* qui cette fois devait se souvenir de VOLTAIRE dénommant *Bacon :* « le père de la philosophie expérimentale ». Passons plus brièvement, pour finir cet exposé, à quelques autres penseurs intéressés à la question.

Condillac, philosophe français de la deuxième moitié du XVIII^e^ siècle, a subi le reproche d'avoir cru que le seul principe d'identité suffisait aux mathématiques. En dehors de ce principe, soutenait-il, le raisonnement n'a d'autres données premières que des faits fournis par l'expérience. Du reste, il avançait qu'en thèse générale l'art de raisonner se réduit à une langue bien faite. Il avait le tort d'être trop peu rationaliste et trop *sensualiste*, je veux dire de trop expliquer la connaissance par la sensation.

Kant acceptera aisément en Mathématique les deux principes que nous étudions. Et cela d'autant mieux que son effort consiste à *objectiver* cette science, au sens vu antérieurement, et à la rapprocher de la Physique. Il légitime l'induction en vrai partisan du *newtonisme* qu'il est. Du reste, *Isaac Newton*, qui professa, soit dit en passant, à l'Université de Cambridge, et

Hosted by Google

vécut de 1642 à 1726, n'avait-il pas écrit dans ses immortels *Principia*, parus en 1687, la phrase caractéristique que voici : « Dans cette philosophie — entendez à nouveau : la Physique — les propositions sont tirées des phénomènes et généralisées par l'induction » ?

Kant, d'après son système, le *criticisme*, accorde par une sorte d' « idéalisme transcendantal » les lois de l'esprit et celles du réalisme empirique, c'est-à-dire de la nature. Au surplus, son idéalisme transcendantal a sensiblement évolué, en s'éloignant par exemple de *l'intellectualisme* de *Descartes* ou de *l'idéalisme métaphysique* de Leibniz, le jour où il envisagera l'espace (le champ d'action des phénomènes géométriques, ainsi qu'il dirait volontiers) non plus comme une forme *a priori* de l'entendement pur mais de l'intuition sensible, moins idéale certes que l'intuition cartésienne. Si nous ajoutons : 1° qu'il était peu enclin à suivre la logique d'*Aristote* ; 2° que dans la question des premiers principes mathématiques il a fait reproche d'exclusivisme à l'école leibnizienne, en l'espèce surtout du célèbre disciple, WOLFF, dont l'effort a consisté à faire rentrer le principe de raison dans celui de contradiction ; 3° qu'il croyait tout jugement mathématique fécond parce que « synthétique » ou « synthétique *a priori* » si on préfère, savoir : induit plutôt que déduit, nous pourrons conclure, sans crainte cette fois-ci, qu'il aurait admis le jugement inductif, de préférence même au jugement déductif. Et certes il n'aurait manifesté, à notre sens, aucune répugnance pour accepter notre titre de mathématicien objectiviste !

Hamilton innove dans une logique purement abstraite, sans application parfaite au monde réel, l'analogue du principe d'induction complète, première manière. En effet, à côté du syllogisme déductif, il imagine un syllogisme inductif, irréductible, croit-il, au précédent, mais plus véritablement inductif en tous cas que le syllogisme aristotélicien des « animaux sans fiel ». Voici son exemple : « Cet aimant, cet autre, etc... attirent le fer ; or cet aimant, cet autre, etc... sont *pensés* comme étant *tous* les aimants

Hosted by Google

possibles ; donc tous les aimants attirent le fer. » Son principe logique peut s'indiquer en deux mots : ce qui appartient aux parties constituantes appartient par cela même au tout constitué.

Claude Bernard, le grand physiologiste et l'écrivain scientifique du milieu du XIX^e^ siècle, possède une théorie tout opposée à celle de *Stuart Mill* qui, on l'a vu ci-dessus, donnait le pas à l'induction. Il voit en effet dans la déduction un type de raisonnement original auquel se ramènerait l'induction elle-même. Dans ce but, il soutient qu'une *loi* n'est jamais à l'origine qu'une vue de l'esprit, *hypothétique*, cela va de soi, et qu'alors la déduction conduit à la preuve expérimentale de l'hypothèse érigée désormais en *principe*. Prenons à son livre, *Introduction à la médecine expérimentale*, l'extrait suivant : « De tout cela je conclurai que l'induction et la déduction appartiennent à *toutes* les sciences. »

TAINE enfin, le philosophe de la fin du XIX^e^ siècle, dont la critique veut s'établir sur une base scientifique, sur une sorte de méthode expérimentale, imagine hardiment que le but suprême de la science sera de remonter de loi particulière en loi particulière jusqu'à une loi, la plus générale possible, qu'il appelle l'« axiome éternel » et dont la déduction, qui devient ainsi la forme achevée des sciences, fera sortir toutes les lois nécessaires.

De tout ce qui précède, et sans parler des auteurs encore vivants, nous conclurons de la sorte.

La déduction et l'induction voisinent dans un grand nombre de sciences qui sont d'autant plus parfaites, achevées dans leurs détails, qu'elles utilisent davantage la déduction, comme par exemple la physique mathématique, proche parente actuellement des mathématiques pures. Le principe d'identité et de contradiction est la condition *sine qua non* de toute pensée. Celui d'induction complète, qu'on le regarde ou non comme une *intuition*, paraît moins indispensable aux mathématiques proprement dites, surtout sous sa forme première où il a le caractère déductif. Sous sa forme généralisée même, alors qu'il deviendrait vraiment ins-

Hosted by Google

tructif, il faudra encore distinguer les deux points de vue objectif et subjectif. En résumé, la pierre angulaire de la controverse mathématique actuelle, c'est que les mathématiciens employant tous le *raisonnement déductif*, les subjectivistes porteront toujours en conclusion des *jugements déductifs* et les objectivistes porteront, dans le *domaine de l'infini*, parfois des *jugements inductifs*.

Digression historique sur le principe d'induction complète.

Voici, au surplus, à propos du procédé par récurrence quelques renseignements inédits qu'a bien voulu nous communiquer M. **Moritz Cantor**, l'éminent historien des mathématiques, professeur à l'Université de Heidelberg, et dont les savantes « Leçons sur l'histoire de la Mathématique, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* », font autorité dans la matière. Je les donne textuellement : « L'induction complète a été employée d'abord par *Francesco Maurolyco* dans *Arithmeticorum libri duo* (Venise, 1558). *Pascal* a lu ce livre et le cite pour le théorème

$$2.\ \frac{a\,(a+1)}{2} - a = a^2,$$

que *Maurolyco* a justement démontré par la méthode en question. Ensuite *Pascal* a employé cette même méthode dans son *Traité du triangle arithmétique* qu'on a trouvé tout imprimé, en 1662, à la mort de *Pascal*. Ce n'est qu'en troisième rang que se trouve *Jacques Bernoulli*. A-t-il nouvellement inventé la méthode, a-t-il lu un de ses devanciers ? Je n'en sais rien. Dans tous les cas il n'en dit rien et il emploie l'induction complète si souvent que *Kœstner*, en suivant son exemple, nomme la méthode « méthode de *Bernoulli* ». »

Nous ajouterons simplement quelques explications.

Hosted by Google

Francesco Maurolyco, qui vivait au XVI^e^ siècle, est un des premiers savants italiens de la Renaissance. Un historien des mathématiques, surtout des mathématiques en Italie, *Libri*, écrivait de lui que c'était « le seul véritable géomètre qu'ait eu la Sicile depuis *Archimède* ». D'ailleurs on se rappelle que la ville sicilienne, Syracuse, fut la patrie du « grand *Archimède* ».

L'allemand *Kœstner*, était, au XVIII^e^ siècle, à la fois historien des mathématiques et mathématicien.

Quant au théorème, à la propriété si on veut, que symbolise l'égalité ci-dessus, le procédé par récurrence ou par induction s'y applique aisément. D'abord, à envisager le procédé sous sa « première manière » comme nous disions, il suffira de démontrer l'égalité, par vérification, immédiate certes, pour a égal à un entier quelconque n. Alors la propriété étant vraie pour a égal à 1, 2, 3, ..., n,... est toujours vraie.

Ensuite à l'envisager sous sa « deuxième manière », il suffira de constater que l'égalité a lieu pour $a = 1$, puis, en admettant qu'elle ait lieu pour $a = n$, de démontrer facilement du reste, qu'elle a lieu encore pour $a = n + 1$.

Alors elle aura lieu pour 1, puis pour 2, pour 3, indéfiniment. Observons enfin qu'après avoir étendu cette propriété au cas où a égale une fraction, chose facile par la théorie des fractions où le raisonnement reste déductif constamment, si nous voulions l'étendre au cas où a est un nombre incommensurable, au sens objectiviste, nous le pourrions, car cette propriété s'y prête, mais nous ne le pourrions qu'en vertu d'un jugement inductif. Et c'est alors que le principe entrant en jeu mériterait vraiment son nom d'induction complète.

Hosted by Google

QUATRIÈME LEÇON

NATURE DES DÉMONSTRATIONS, MÉCANISME DU RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

Nous avons dit que pour assurer la validité d'une proposition mathématique, non évidente d'elle-même et apportant une connaissance nouvelle, il fallait une démonstration. Le jugement final de conclusion, terminant la démonstration, est véritablement concluant, déductif, dirons-nous dans le même sens, lorsque celle-ci se poursuit de déduction en déduction jusqu'à ce jugement, y compris. Sinon, si malgré la série des déductions intermédiaires, elle ne peut l'atteindre, la conclusion reste moins certaine et devient un jugement inductif. Il importe donc d'étudier, et c'est la presque totalité des cas, les démonstrations à conclusion déductive.

Il existe dans le langage technique deux mots presque synonymes : *démonstration* et *raisonnement.* On dira indifféremment : faire la démonstration, le raisonnement, pour prouver tel ou tel fait mathématique. Fournir au long d'une démonstration les raisons par lesquelles on déduit une vérité d'autres vérités, une connaissance de connaissances antérieures, c'est justement faire un raisonnement. Le raisonnement est donc l'organe, l'instrument essentiel de la démonstration. Or, si dans la *méthode démonstrative*, qui est la méthode caractéristique des mathématiques, on se sert d'un nombre toujours croissant de procédés particuliers à chaque section, tels sont les procédés et on dit aussi mais abusivement les méthodes de géométrie, il n'en reste pas

Hosted by Google

moins vrai que le raisonnement ne procède que par trois voies différentes, ne possède que trois processus logiques distincts. Ces trois raisonnements, que nous devons différencier aujourd'hui, nous les nommerons : le *raisonnement déductif*, le *raisonnement réductif* et *le raisonnement par l'absurde*.

Raisonnement déductif. — C'est le raisonnement-type auquel se ramènent les deux autres. C'est lui que nous avons rencontré jusqu'ici.

Il utilise les déductions dans leur ordre normal, en suite directe. Comme le nom même de déduction l'indique, il permet de tirer logiquement d'une vérité déjà connue une vérité nouvelle, inconnue avant la démonstration.

Mais, pour notre objet actuel, prenons un exemple.

Partons, en supposant que a est un nombre arithmétique, de la vérité qu'exprime l'égalité

$$(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2.$$

Mais comme $1 + 2a + a^2$ surpasse $1 + 2a$ d'un nombre positif, on en déduit aussitôt l'inégalité

$$(1 + a)^2 > 1 + 2a.$$

Multiplions-en les deux membres par $1 + a$ qui est positif, l'inégalité ne changera pas de sens et deviendra

$$(1 + a)^2 (1 + a) > (1 + 2a)(1 + a)$$

ou

$$(1 + a)^3 > 1 + 2a + a + 2a^2.$$

Et comme $1 + 2a + a + 2a^2$ surpasse $1 + 2a + a$ ou $1 + 3a$, il vient enfin et *a fortiori*

$$(1 + a)^3 > 1 + 3a.$$

Cette inégalité exprime une vérité nouvelle, analogue du reste à la précédente

$$(1 + a)^2 > 1 + 2a.$$

Remarquons en passant que l'inégalité générale

$$(1 + a)^n > 1 + na$$

est vraie et peut se démontrer par récurrence.

Hosted by Google

En effet, admettons que l'on ait, en faisant $n = m$,

$$(1) \qquad (1+a)^m > 1 + ma,$$

et prouvons que l'on aura pour $n = m + 1$

$$(2) \qquad (1+a)^{m+1} > 1 + (m+1)a.$$

Dans ce but, multiplions les deux membres de l'inégalité (1), supposée vraie, par $1 + a$, il viendra

$$(1+a)^{m+1} > (1+ma)(1+a)$$

ou $$(1+a)^{m+1} > 1 + ma + a + ma^2$$

et *a fortiori* $$(1+a)^{m+1} > 1 + ma + a,$$

c'est-à-dire l'inégalité (2) précisément.

Raisonnement réductif. — On dit d'abord qu'on fait une *réduction* pour démontrer une certaine vérité mathématique donnée *a priori* lorsque, en partant de cette vérité, on recherche de quelles autres successivement on peut la déduire. Le raisonnement réductif est alors celui qui utilise la réduction. Il est l'*inverse* du raisonnement déductif, puisqu'inversement on aboutira à la vérité en question, par voie déductive cette fois, en partant de la vérité finale à laquelle on s'était ramené et qu'on devra évidemment avoir déjà démontrée.

Proposons-nous de prouver, en gardant l'exemple ci-dessus, l'inégalité

$$(1+a)^3 > 1 + 3a.$$

Observons dans ce but que si on prouvait la suivante :

$$(1+a)^3 > 1 + 3a + 2a^2,$$

la première s'en déduirait comme ayant lieu *a fortiori*.

Or $$1 + 3a + 2a^2 = (1+2a)(1+a),$$

donc l'inégalité nouvelle est équivalente à celle-ci:

$$(1+a)^3 > (1+2a)(1+a).$$

Observons encore que celle-ci se déduira à son tour de la suivante :

$$(1+a)^2 > 1 + 2a,$$

Hosted by Google

en multipliant les deux nouveaux membres par $1 + a$ du reste.

Enfin pour que l'inégalité dernière eût lieu, il suffirait que l'on eût

$$(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2,$$

et c'est ce qui a justement lieu.

De même il ne serait pas difficile de prouver réductivement l'inégalité générale

$$(1 + a)^n > 1 + na,$$

en employant, mais à rebours, le procédé par récurrence. On montrerait qu'on l'établit pour $n = m + 1$ pourvu qu'elle le fût déjà pour $n = m$, puis en revenant de proche en proche vers les petites valeurs de l'entier n, qu'il suffirait qu'elle fût établie pour $n = 2$, ce qui est immédiat.

On a pu voir sur ces exemples comment les deux modes sont bien inverses l'un de l'autre. La démonstration réductive n'apporte rien d'essentiellement nouveau sinon au mécanisme du moins à la nature du raisonnement, puisqu'on pourrait toujours la rendre déductive en la recommençant, mais à rebours cette fois. Cela explique qu'on n'ait pas à créer l'expression de jugement réductif qui serait l'analogue de jugement déductif.

Enfin observons incidemment — car nous la retrouverons par la suite — combien la loi de la substitution des équivalents s'est de nouveau mise en lumière à propos de ces démonstrations.

Raisonnement par l'absurde. — On pourrait tout aussi bien l'appeler : *raisonnement par la contradictoire* et c'est ce qui nous apparaîtra en étudiant son mécanisme.

Soit une proposition mathématique qu'on ne sait pas ou qu'on ne veut pas démontrer directement. On en considère alors la contradictoire et on démontre que celle-ci est fausse, *absurde* préfère-t-on dire dans cette circonstance.

Il en résulte que la proposition primitive est nécessairement vraie, puisque nous savons que deux propositions contradictoires et non simplement contraires ne peuvent être fausses à la fois.

Hosted by Google

Exemple. — En admettant d'avance qu'il existe des nombres irrationnels, démontrons que la racine carrée de 2, c'est-à-dire le nombre, quel qu'il soit, dont le carré est 2, est un nombre irrationnel.

Pour alléger l'écriture représentons ce nombre par $\sqrt{2}$.

Considérons dès lors la proposition contradictoire de celle qui est en jeu ; ce sera que $\sqrt{2}$ est rationnel, à savoir entier ou fractionnaire. Et prouvons qu'elle est absurde.

En effet, d'abord $\sqrt{2}$ ne peut être un entier qui, inférieur à 2, ne saurait être que 1, puisque l'égalité $\sqrt{2} = 1$ ou alors son équivalente obtenue par élévation au carré $2 = 1$ est absurde.

Ensuite $\sqrt{2}$ peut-il être une fraction ? Prenons, dans cette hypothèse, la fraction prétendue sous sa forme irréductible $\frac{a}{b}$, où a et b sont premiers entre eux. Ecrivons momentanément l'égalité supposée vraie

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \qquad \text{ou son équivalente} \qquad 2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Mais un théorème connu apprend que a^2 et b^2 sont premiers entre eux, tout comme a et b.

Par suite l'égalité finale ou, si l'on préfère, son équivalente $2b^2 = a^2$, qui montre que a^2 et b^2 admettent b^2 pour diviseur commun, est absurde.

Donc la contradictoire étant fausse, désormais l'affirmation que $\sqrt{2}$ est irrationnel est acquise.

Faisons à l'égard du raisonnement par l'absurde la remarque critique qu'il peut être soit déductif soit réductif, dès qu'on s'est ramené à la démonstration de la proposition contradictoire en question.

En définitive nos trois modes de raisonnement permettent le plus communément de porter en conclusion un jugement déductif.

Emploi du raisonnement déductif. — On s'en sert le plus naturellement et le plus souvent possible, quand il est question

Hosted by Google

de faire normalement des déductions, à partir de connaissances déjà acquises. Il aboutit dans des directions différentes à des résultats variés. On l'utilise dès qu'avance la science mathématique. En particulier il intervient essentiellement dans la théorie des nombres en Analyse mathématique, et c'est lui qui assure ces longues chaînes de théorèmes qui consolident les diverses branches de la géométrie.

Je ne sais plus qui comparait la Mathématique à un immense arbre généalogique qui aurait le principe d'identité à sa base, les propositions aux points de bifurcation de ses nombreux rameaux et dont la déduction serait la sève fécondante.

Emploi du raisonnement réductif. — Celui-ci, sur lequel nous devons insister davantage, trouve son emploi dans le procédé dit du *problème résolu*, lequel est fréquent en géométrie, essentiel dans la résolution algébrique des équations, indispensable en géométrie analytique. Résoudre une équation, c'est supposer en effet le problème résolu d'avance, en quelque sorte, puisqu'on suppose que la valeur inconnue de la racine, qu'il s'agit de trouver, vérifie, dès l'abord, l'équation. C'est par la suite seulement qu'on cherche les divers procédés de solution, consistant à dégager la valeur numérique ou littérale de cette racine. De même en géométrie analytique quand il s'agit d'étudier algébriquement une courbe géométrique, un lieu proposé, on s'adresse aussitôt à son *équation*, ce qui suppose par conséquent le problème résolu en quelque façon. Plus tard seulement on précise la nature particulière de cette équation.

Eh bien, pourquoi dans ces conditions utilise-t-on le mode réductif ? Avant de répondre définitivement, traitons le point capital suivant qui n'est pas, à notre avis, assez mis en évidence dans l'enseignement de la Mathématique.

Dans cette science, comme en Logique d'ailleurs, on constate, sous le contrôle de la raison, que le jeu de la déduction permet de *déduire des conclusions vraies de propositions fausses* dans leur ensemble, c'est-à-dire dont quelques-unes sont fausses.

Hosted by Google

Voici un premier exemple logique :

Tout animal est cheval ;
Or aucun homme n'est animal ;
Donc aucun homme n'est cheval.

La conclusion obtenue déductivement est vraie bien que la première prémisse soit fausse et le raisonnement dans sa totalité apparaît comme un véritable paralogisme ou raisonnement de travers, au sens étymologique du mot.

Voici un deuxième exemple mathématique :

Désignons en général par $\sqrt{a}$, où a est un nombre positif, le nombre positif dont le carré est a.

Ecrivons maintenant l'égalité

(1) $$\sqrt{x^2} = x$$

à propos de laquelle x^2 est bien un nombre positif.

L'affirmation qu'elle constitue est justement fausse dans le cas où x devient un nombre négatif. Ainsi pour $x = -4$ on serait conduit à écrire

$$\sqrt{(-4)^2} = -4 \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{16} = -4,$$

ce qui est manifestement faux car $\sqrt{16} = 4$.

Cependant, de cette égalité (1) fausse dans le cas en question, la déduction va faire apparaître un résultat vrai.

Elevons en effet au carré les deux membres supposés égaux, on obtient ainsi déductivement des nombres égaux, d'où l'égalité

(2) $$x^2 = (x)^2 = x^2,$$

qui est vraie et même on ne peut plus vraie.

En conséquence on ne pourra pas affirmer qu'une proposition donnée *a priori* est valide sous prétexte qu'on en pourrait tirer par déduction une proposition certaine.

Au contraire la réduction ne saurait nous induire en erreur car elle nous ramène en somme à faire des déductions à partir de propositions certaines. Or une loi de la raison est que *de propositions vraies on ne peut déduire par le jeu de la déduction que des conclusions vraies.*

Cela posé, la réponse à notre demande devient facile. Dans le

Hosted by Google

procédé du problème résolu, en algèbre, en géométrie analytique, partout où l'on part de propositions à démontrer, on ne devra pas raisonnablement utiliser le mode déductif mais le réductif. En résumé, il faut toujours partir du connu pour en inférer l'inconnu, comme on dit en philosophie.

Mais appliquons le raisonnement réductif à l'exemple proposé.

Peut-on déduire la proposition (1) de (2) ?

Deux hypothèses se présentent :

Si x est positif, la déduction est possible, car alors les deux membres de (1) étant positifs et ayant des carrés égaux sont égaux nécessairement.

Si x est négatif la déduction serait illégitime, car les deux membres de (1), différant par leur signe, ne sauraient être égaux.

D'ailleurs, sous cette deuxième hypothèse, la seule affirmation valable serait : $\sqrt{x^2} = -x$.

Le raisonnement réductif mérite donc quelque attention.

Étant donné son importance logique vis-à-vis de la rigueur mathématique, nous aurons à l'appliquer le cas échéant.

Emploi du raisonnement par l'absurde. — Si pour des vérités premières, élémentaires, il est préférable d'user des deux modes précédents, il existe pourtant un domaine où ce troisième mode règne en maître. C'est le domaine de l'infini.

Ce fait, trop négligé lui aussi dans l'enseignement, et que nous regrettons de n'avoir pas le loisir de mettre bien en lumière au cours de nos leçons, vous sera déjà certain si vous réfléchissez que l'exemple ci-dessus du raisonnement par l'absurde se rapporte à un nombre irrationnel $\sqrt{2}$ et que l'*irrationnalité* implique l'infini. Rappelez-vous encore une proposition première de géométrie plane, à savoir : deux droites perpendiculaires à une troisième sont *parallèles*, ou ne se rencontrent pas. Pour la démontrer on en prend la contradictoire : les deux droites se rencontrent. Et on prouve l'absurdité de celle-ci, car du moment que les droites se rencontrent, par leur point commun il passe deux perpendiculaires à une droite proposée. Or cette affirmation

Hosted by Google

est absurde, puisque par un point il ne passe qu'une perpendiculaire à une droite. Eh bien, ce mot de parallèle vous indique qu'il s'agit encore de l'infini.

Mais laissons l'infini de côté pour aujourd'hui et terminons par trois digressions où nous gardons le raisonnement en question.

I. — *Digression sur la loi de réciprocité en géométrie.*

Voici d'abord ce qu'on entend par la loi ou comme on dit à tort, par le principe de réciprocité.

Soit un triangle ABC, pour fixer les idées. Nous désignerons les côtés opposés aux angles de sommets A et B par a et b.

Une étude directe et complète (c'est essentiel) montre qu'aux trois hypothèses incompatibles deux à deux, à savoir :

$$\widehat{A} = \widehat{B}, \qquad \widehat{A} > \widehat{B}, \qquad \widehat{A} < \widehat{B},$$

il correspond, par démonstration, les trois conclusions incompatibles deux à deux, savoir :

$$a = b, \qquad a > b, \qquad a < b.$$

Dans ces conditions, les trois *propositions réciproques,* c'est-à-dire où les hypothèses sont devenues les conclusions et *vice versa* sont forcément vraies.

Montrons par exemple la deuxième :

Si on a $a > b$ on a également $\widehat{A} > \widehat{B}$.

En effet, raisonnons par l'absurde, en prouvant l'absurdité de la contradictoire qui serait :

Si on a $a > b$ on a également soit $\widehat{A} < \widehat{B}$ soit $\widehat{A} = \widehat{B}$.

Aurait-on $\widehat{A} < \widehat{B}$ que cela entraînerait, d'après l'étude directe, $a < b$, aurait-on $\widehat{A} = \widehat{B}$ que cela entraînerait $a = b$, donc dans aucun cas $a > b$.

Ainsi $a > b$ ne peut entraîner que $\widehat{A} > \widehat{B}$.

Hosted by Google

Soit un nouvel exemple où un plus grand nombre de cas sont possibles.

Considérons deux circonférences d'un même plan, de rayons r, r' et de distance des centres d.

Il y a cinq hypothèses possibles :

1° les circonférences sont extérieures ; 2° tangentes extérieurement ; 3° sécantes ; 4° tangentes intérieurement ; 5° l'une intérieure à l'autre,

et cinq conclusions :

1° $d > r + r'$; 2° $d = r + r'$; 3° $r - r' < d < r + r'$; 4° $d = r - r'$; 5° $d < r - r'$, en supposant $r > r'$ bien entendu.

Or les cinq cas hypothétiques sont les seuls possibles et hypothèses et conclusions sont respectivement contraires deux à deux. Il s'en suit que toutes les propositions réciproques sont certaines, d'après la loi de réciprocité, je veux dire qu'on saurait les justifier comme on faisait précédemment. Ainsi, succinctement, si on a $d > r + r'$ les circonférences sont extérieures car si elles étaient tangentes, ou alors sécantes, ou alors l'une intérieure à l'autre, c'est qu'on aurait soit $d = r + r'$ soit $d = r - r'$, ou alors $r - r' < d < r + r'$, ou alors $d < r - r'$ mais jamais $d > r + r'$.

L'énoncé général de la loi est le suivant :

Si dans une question toutes les propositions possibles admettent en hypothèse et en conclusion des jugements s'excluant deux à deux, les réciproques sont vraies forcément.

On dit souvent que chaque conclusion est *caractéristique* de l'hypothèse correspondante ou que la propriété en question est caractéristique.

Signalons aussi que cette loi mathématique se retrouve en logique sous le nom de théorème de HAUBER.

C'est dans le livre *Scholæ logico-mathematicæ* que ce mathématicien et logicien allemand du début du XIX^e^ siècle démontrait son théorème affirmant, pour parler comme les logiciens eux-mêmes, la réciproque de plusieurs *alternatives exclu-*

Hosted by Google

sives et exhaustives, à savoir de plusieurs propositions contraires deux à deux et épuisant tous les cas possibles.

II. — *Digression sur la loi d'homogénéité des relations métriques.*

Si, à propos d'une figure particulière de géométrie euclidienne, il existe une certaine propriété intrinsèque, cette propriété donnera lieu à une relation entre les mesures des éléments intéressés de la figure ; de plus cette *relation métrique* sera homogène, c'est-à-dire qu'une fois rendue entière les termes y seront du même degré. Cela suppose essentiellement toutefois que l'unité de grandeur, par exemple le mètre, employée pour la mesure des éléments n'ait aucun rapport particulier avec eux, en un mot reste tout à fait arbitraire.

Prenons en effet, en suivant l'exemple d'*Auguste Comte*, dans son *Cours de philosophie positive* si connu, la relation relative au triangle rectangle

$$a^2 = b^2 + c^2$$

ou relation de *Pythagore*.

Elle est homogène et de degré 2 par rapport aux nombres a, b, c, mesures de l'hypoténuse et des côtés de l'angle droit. Elle signifie intrinséquement que l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est la somme des aires des carrés construits sur les deux autres côtés. Montrons alors qu'une relation entière entre ces trois nombres étant supposée exister d'avance ne peut être qu'homogène.

Raisonnons par la contradictoire et établissons que la relation ne pourrait pas être non-homogène, de la forme $a^2 = b^2 + c$ pour fixer les idées. En effet, mesurons les côtés avec une autre grandeur unité 2, 3, 4, ..., fois plus petite que la première. Les mesures deviennent 2, 3, 4, ..., fois plus grandes, et la

Hosted by Google

propriété, invariable évidemment quelle que soit l'unité choisie, se traduit successivement par les relations

$$\begin{aligned} 4a^2 &= 4b^2 + 2c, \\ 9a^2 &= 9b^2 + 3c, \\ 16a^2 &= 16b^2 + 4c, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

ou, plus simplement,

$$a^2 = b^2 + \frac{c}{2},$$

$$a^2 = b^2 + \frac{c}{3},$$

$$a^2 = b^2 + \frac{c}{4},$$

. . . . . .

Or chacune de ces relations est en contradiction avec la relation supposée, qui ne peut donc se légitimer.

La loi est générale et nous fournit du reste un critérium puissant pour reconnaître, je ne dis pas l'exactitude d'une relation métrique si elle est homogène, mais seulement l'inexactitude d'une telle relation si elle n'est pas homogène.

Et, soit dit en passant, cette remarque nous fera songer à cette idée en apparence paradoxale, mais trop philosophiquement vraie malheureusement, qu'il est dans beaucoup de cas plus facile de s'apercevoir de l'erreur que de reconnaître la vérité.

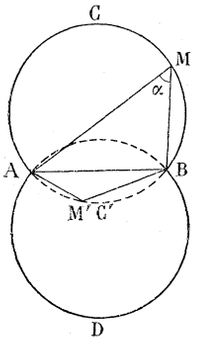
Enfin au point de vue historique nous voyons déjà se dessiner la loi d'homogénéité chez le célèbre algébriste *Viète*, dont l'esprit était éminemment philosophique.

Dans son introduction au calcul algébrique — à l'art analytique, comme indique le titre de l'ouvrage *In artem analyticam isagoge* — sa *loi des homogènes* se manifeste lorsqu'il écrit : « Les grandeurs qui peuvent être comparées entre elles sont homogènes, car celles qui sont hétérogènes, comment pourraient-elles s'ajouter ? »

Hosted by Google

III. — *Digression sur les lieux géométriques.*

Rappelons d'abord qu'un *lieu géométrique*, et nous avons dit qu'on attribue cette notion à *Platon*, est un ensemble de points, distribués par exemple sur une ligne, qui satisfont à une même condition, qui jouissent d'une même propriété. Ainsi le lieu géométrique des points M d'où l'on voit un segment AB sous un angle donné α, se compose de deux arcs de cercle ACB et ADB, placés symétriquement par rapport à AB.



On ne doit pas se contenter pour trouver avec une entière rigueur un lieu proposé, de rechercher certain ensemble de points, une courbe pour fixer les idées, sur laquelle se trouveront des points répondant à la question, et de conclure que cette courbe constitue le lieu proposé. Car, d'une part, on pourrait oublier d'autres courbes analogues, intervenant au même titre que la précédente, et, d'autre part, accepter la courbe en totalité alors qu'une partie seulement appartient au lieu.

Aussi faudra-t-il contrôler la recherche directe par la recherche réciproque, en quelque manière, à savoir : prouver que réciproquement un point de la courbe découverte répond au lieu. En d'autres termes, assurer directement que tout point du lieu se trouve sur le système de courbes envisagé et réciproquement que tout point de ces courbes appartient au lieu. Alors un point qui ne répond pas à la propriété considérée n'est pas sur une des courbes ou sur un des arcs de courbe trouvés, car s'il y était il jouirait de cette propriété. De même un point en dehors de ce système d'arcs de courbe ne satisfait pas à la condition primitive car s'il y satisfaisait il appartiendrait au système.

Hosted by Google

Ainsi, pour notre exemple, on doit choisir les arcs indiqués et non les circonférences entières, car d'un point de l'arc AC'B on verrait AB sous l'angle supplémentaire de α et non sous l'angle α. La proposition directe ainsi étendue, savoir : un point du lieu est sur une des deux circonférences, serait encore vraie, mais cette fois la proposition réciproque, savoir : un point d'une des deux circonférences fait partie du lieu, ne le serait plus.

Au lieu de considérer la proposition réciproque de la directe, on pourrait aussi considérer la proposition *opposée* et encore l'opposée de la réciproque, où chaque hypothèse et chaque conclusion sont remplacées par leurs contradictoires. Nous les avons énoncées d'ailleurs en disant qu'un point qui ne répond pas à la propriété n'est pas sur le lieu et qu'un point hors du lieu ne répond pas à la propriété. Si l'on symbolise par les notations H et C, puis par — H et — C, l'hypothèse et la conclusion de la proposition directe, puis leurs contradictoires, on symbolisera aisément les quatre propositions étudiées de la façon suivante, en faisant précéder la conclusion de l'hypothèse, à chaque fois :

1°	proposition directe :	H ———	C
2°	— réciproque :	C ———	H
3°	— opposée de la directe :	— H ———	— C
4°	— opposée de la réciproque :	— C ———	— H.

Une première remarque, c'est que, à son tour, la réciproque de l' « opposée de la directe » se symbolise par — C ——— — H et par suite, coïncide avec l'opposée de la réciproque.

Plus brièvement : la réciproque de l'opposée est l'opposée de la réciproque. Et en effet, l'opposée est : un point qui ne jouit pas de la propriété n'est pas sur le lieu. Sa réciproque est : *un point qui n'est pas sur le lieu ne jouit pas de la propriété.* D'un autre côté, la réciproque de la directe était : un point qui est sur le lieu jouit de la propriété. Son opposée serait : *un point qui n'est pas sur le lieu ne jouit pas de la propriété.* Il y a bien coïncidence.

Une deuxième remarque c'est que les propositions 1° et 4° s'entraînent mutuellement. En effet, admettons la première ou que

Hosted by Google

H entraîne C. Je dis que — C entraîne — H. Raisonnons par l'absurde. Si — C n'entraînait pas — H elle entraînerait H, mais H entraîne C et non — C.

En de nouveaux termes : un point qui jouit de la propriété est sur le lieu. Je dis que : un point qui n'est pas sur le lieu ne jouit pas de la propriété, car si ce point jouissait de la propriété il serait sur le lieu et non hors du lieu.

Pareillement on verrait que les deux propositions intermédiaires se déduisent l'une de l'autre.

Au demeurant on s'exercera à justifier toute cette discussion sur l'exemple géométrique ci-dessus.

En tout cas il suffira pour assurer complètement l'exactitude d'un lieu en tant que système de courbes, pour fixer les idées, dont les points répondent à la condition proposée, d'établir en même temps la vérité des propositions : 1° et 2°, ou 1° et 3°, ou 4° et 2°, ou 4° et 3°.

Elles reviennent toujours en fin de compte aux deux premières.

Remarque critique. — On se rappelle, par la deuxième leçon, que nous nommions : propositions contraires, ou alors contradictoires, deux propositions ayant la même hypothèse, mais dont les conclusions étaient contraires, ou alors contradictoires.

Or, on nomme malheureusement aussi : propositions contraires celles où à la fois les hypothèses et les conclusions sont respectivement contradictoires.

C'est pour éviter toute confusion que nous avons choisi, dans ce dernier cas, l'expression de *propositions opposées*.

Faisons seulement remarquer qu'à l'inverse de deux propositions contraires, ou alors contradictoires, deux propositions opposées peuvent être vraies en même temps.

Hosted by Google

CINQUIÈME LEÇON

(Suite de la précédente.)

Critique et histoire.

Aujourd'hui nous donnerons la double partie critique et historique de la leçon qui précède sur la démonstration et son mécanisme.

Justifions avant tout les expressions de raisonnement déductif, réductif, donnés à la place de *synthétique*, *analytique*, comme on trouve trop couramment.

Vous savez qu'après *Kant* les philosophes entendent par proposition, et mieux par *jugement analytique*, un jugement où l'attribut est contenu en quelque sorte dans le sujet. Le rôle de l'analyse, mot tiré du verbe grec λύειν, délier, consiste alors à faire sortir du sujet cet attribut, ou prédicat, dit-on également. Un pareil jugement possède d'ailleurs un caractère constant d'évidence en ce qu'il est plus ou moins immédiatement réductible au principe d'identité, l'axiome essentiel.

Vous savez aussi qu'on entend par proposition et tout aussi bien par jugement synthétique ce que *Kant* désignait sous le nom de *jugement synthétique a priori*, savoir un jugement dans lequel l'attribut apporte à l'objet une connaissance nouvelle. Il y a cette fois une juxtaposition, une synthèse (de σύν, avec, et de τίθημι, je pose) pour les connaissances qui constituent la totalité du jugement. Celui-ci aura moins d'évidence que le premier ; il conviendra tout au plus pour désigner un postulat, tel le principe d'induction complète sous sa forme ultime, avons-nous vu.

Hosted by Google

Certes, il ne saurait être question, dans notre étude, de jugement synthétique *a posteriori*, qu'on rencontre dans les sciences expérimentales, par exemple : l'eau bout à 100 degrés.

Eh bien, les logiciens ne se mettent plus d'accord quand il s'agit de préciser en mathématique des cas de jugements analytique et synthétique. Un fait curieux vous fixera à ce propos. Le philosophe néo-criticiste **Renouvier**, mort en 1903, signalait que *Kant* s'y est trompé lui-même en donnant l'égalité $7 + 5 = 12$ pour son premier exemple de jugement synthétique *a priori*. C'est bien plutôt un jugement analytique, jugeait *Renouvier* qui, il est opportun de l'ajouter, voulant ramener toutes les connaissances mathématiques au seul principe de contradiction, les considérait comme analytiques.

A notre point de vue, cette proposition sera tout bonnement une vérité de déduction, un jugement déductif. Et en effet on déduira successivement :

$$7 + 5 = 7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$= 9 + 1 + 1 + 1 = 10 + 1 + 1 = 11 + 1 = 12.$$

En outre, si vous apprenez que tel ou tel auteur découvre dans le mode de démonstration appelé couramment « synthèse géométrique » plutôt la marque de l'analyse que de la synthèse géométrique, vous concevez qu'en présence de pareilles discordances nous ayons voulu éviter le moindre rapprochement entre les expressions de *jugements analytique et synthétique* et celles de *démonstrations analytique et synthétique* qui n'ont rien à voir ensemble.

Donc vous imaginerez toujours que la méthode de la géométrie analytique, pour prendre un exemple, est la méthode réductive et vous pourrez faire l'étude de cette science, son analyse, au sens philosophique et habituel du mot.

Cela entendu, arrivons à l'objet propre de cette leçon.

Vous vous souvenez, qu'à propos des premiers principes, nous distinguions les sciences mathématiques des sciences physiques par ce fait que les unes utilisent surtout la déduction et les autres surtout l'induction. Vous savez aussi que le jeu de la déduction constitue essentiellement la démonstration.

Hosted by Google

D'un autre côté, vous n'ignorez pas, ce qui est indispensable pour bien comprendre les deux grands systèmes philosophiques : le *rationalisme* et l'*empirisme*, que l'on différencie les vérités de raison dites *nécessaires*, relatives aux mathématiques, et les vérités d'expérience dites de *fait* ou *contingentes*, relatives aux sciences physiques. D'autant mieux qu'il vous souvient peut-être que la raison majeure qui détermina le rationaliste *Leibniz* à écrire son œuvre capitale, les *Nouveaux essais sur l'Entendement humain*, c'est le reproche de ne pas séparer ces vérités les unes des autres, qu'il adressait au philosophe empiriste anglais de la deuxième moitié du XVII^e^ siècle, LOCKE, l'auteur de *l'Essai sur l'Entendement humain*. Or ces vérités nécessaires sont justement appelées *vérités de démonstration*, ou pour employer l'expression de Leibniz lui-même « vérités de raisonnement ». C'est dire par conséquent, combien la démonstration a d'importance en Mathématique, la science rationnelle type. Et cette importance lui a été reconnue par les philosophes anciens et modernes, par les rationalistes principalement, *Descartes*, *Leibniz*, etc.

Quant au rapprochement entre le syllogisme et la démonstration, nous ne l'avons fait nous-même, avons-nous dit, que par commodité. Justement les deux penseurs que nous venons de citer différaient d'opinion à cet égard, le dernier soutenant que « ce n'est pas le syllogisme qui rentre dans la démonstration mathématique, c'est la démonstration mathématique qui est un cas particulier du syllogisme ».

Sans vouloir discuter une question d'ordre plutôt psychologique, sans nous demander pourquoi la démonstration est « astreinte à toutes les règles de la procédure logique et possède en même temps des principes qu'elle ne trouve pas dans le syllogisme proprement dit », pour parler comme M. LIARD, sans entrer surtout dans les discussions de l'école logique moderne, nous reconnaîtrons avec *Pascal* que la mathématique étant une science particulière doit posséder une méthode particulière elle aussi. Nous nous bornerons seulement à citer la pensée de M. **Gaston Milhaud** qui, à propos du « raisonnement et du syllogisme »

Hosted by Google

énonce dans son livre *le Rationnel* ce qui suit : « Ainsi nous consentons à faire une place à part au raisonnement géométrique ; mais ce n'est pas pour le séparer du raisonnement syllogistique, bien au contraire c'est pour reconnaître aux syllogismes dont il est formé une valeur logique toute particulière. »

Voici plutôt quelques détails historiques sur la démonstration.

La méthode démonstrative est l'œuvre du génie grec ; on la fait remonter jusqu'à *Pythagore*, au VI^e^ siècle avant notre ère.

Aristote voit dans la démonstration — pour lui la démonstration est déductive — la condition formelle du savoir et la définit comme le « syllogisme du *nécessaire* ». Elle prend à ses yeux la forme d'une déduction qui partirait de notions fondamentales accordées par les définitions et en ferait dériver nécessairement des propositions sous le contrôle du principe premier de contradiction. Il crée le mot *apodictique* ou mieux son équivalent en grec, à partir du verbe ἀποδείκνυμι, je démontre, pour marquer une affirmation *nécessaire* établie par démonstration. Une affirmation *vraisemblable* serait au contraire *dialectique*, c'est-à-dire appuyée simplement par le dialogue. C'est parce que l'esprit a besoin de savoir non seulement qu'une chose est mais pourquoi elle est qu'il établit la fameuse distinction entre « le que » ou, en grec, τὸ ὅτι et « le pourquoi » ou τὸ διότι. Or le pourquoi des choses mathématiques, c'est justement le raisonnement qui le fournit.

Au Moyen âge, ce besoin de l'esprit n'est guère prononcé, car au dire de **Paul Tannery**, le distingué historien des mathématiques et des sciences en général, mort en 1904, on se contente des énoncés des théorèmes euclidiens que les nombreuses vicissitudes de traduction (1) ont privés pour un temps de leurs démonstrations.

Léonard de Vinci, l'artiste si puissant doublé d'un savant vraiment encyclopédique et qu'on doit regarder comme le véritable précurseur de la Renaissance, a écrit à la fin du XVI^e^ siècle :

(1) Les *Éléments* d'*Euclide* nous ont été transmis par les Arabes. Puis, ils furent traduits en latin d'après l'arabe. La dernière traduction est celle de *Peyrard* en français, avec le texte grec et latin.

Hosted by Google

« Aucune investigation humaine ne se peut appeler vraie science si elle ne passe pas par les démonstrations mathématiques. »

MONTAIGNE, le célèbre philosophe et moraliste de la deuxième moitié du XVI^e^ siècle, que ses *Essais* ont immortalisé, tire argument de certaines propositions mathématiques ou soi-disant telles, à qui il accorde provisoirement la certitude démonstrative, pour asseoir son aimable scepticisme. Mais laissons-le s'exprimer lui-même assez étrangement : « Celui qui y joindrait encore les propositions géométriques qui concluent par la certitude de leurs démonstrations, le contenu plus grand que le contenant (!), etc., et qui trouvent deux lignes s'approchant sans cesse l'une de l'autre et ne pouvant jamais se joindre, et la pierre philosophale (!), et la quadrature du cercle, etc., en tirerait quelque argument pour dire : il n'y a rien de certain que l'incertitude et rien de plus misérable et plus fier que l'homme. »

D'Alembert, qui reçut à sa naissance le nom de *Jean le Rond*, écrivain philosophique — il eut une influence marquée sur la philosophie des mathématiques — et fécond mathématicien du milieu du XVIII^e^ siècle, qui fonda avec DIDEROT, l'*Encyclopédie*, dont il rédigea en particulier le *Discours préliminaire*, s'exprime dans les termes suivants : « Tout raisonnement qui fait voir avec évidence la liaison ou l'opposition de deux idées s'appelle démonstration ; les mathématiques n'emploient que des raisonnements de cette espèce; quelques-unes des autres sciences en fournissent aussi des exemples, quoique moins fréquemment. » Puis se rappelant que certains auteurs, (1) (souvenez-vous de *Descartes* et de ses *Méditations*, de **Spinoza** et de son *Ethique*) ont cru devoir employer la forme, la disposition des livres de géométrie dans leurs écrits, il s'élève ainsi contre une telle exagération : « On a réduit en théorèmes l'énigme inexplicable de l'action de Dieu sur les créatures, on a profané le mot de démonstration dans un sujet où

(1) Le mathématicien *Varignon* qui s'occupa d'une façon heureuse de Mécanique avait adopté une forme géométrique pour discourir sur le dogme eucharistique de la « présence réelle ».

Hosted by Google

les termes mêmes de conjecture et de vraisemblance seraient presque téméraires. »

Portons maintenant notre attention sur les deux premiers modes, déductif et réductif, du raisonnement mathématique. Nous avons formellement indiqué que si l'on voulait, dans certaines circonstances, éviter l'erreur, il était nécessaire de choisir le mode convenable. Et nous avons observé à l'appui de notre affirmation qu'il fallait se garder d'admettre en algèbre l'égalité $\sqrt{x^2} = x$, qui n'est vraie généralement qu'en arithmétique, sous prétexte que sa conséquence déductive, à savoir l'égalité $x^2 = x^2$, non équivalente à la première bien entendu, est toujours vraie. Celui qui négligerait ici l'emploi du mode réductif commettrait donc un *sophisme* ou tout au moins un *paralogisme par fausse analogie* : on pourrait dire également sophisme ou paralogisme par *dénombrement imparfait*. Et, en effet, c'est qu'on aurait alors oublié le cas algébrique où x devient négatif.

Mais il est d'autres occasions où le mode réductif aura son utilité, permettra d'empêcher l'introduction de *solutions étrangères* à tel ou tel problème, par exemple soit lorsqu'on résout une équation en algèbre, soit lorsqu'on recherche *l'équation d'un lieu* en géométrie analytique.

Sans plus attendre voici un exemple du premier genre.

Résolvons l'équation irrationnelle

$$(\alpha) \qquad \sqrt{x-1} = x - 3.$$

Si l'on employait par mégarde le mode de raisonnement déductif, on dirait : Les deux membres de l'équation devenant égaux sous l'influence d'une solution que j'appelle x' pour fixer les idées, leurs carrés seront égaux, et l'équation nouvelle

$$(\beta) \qquad x - 1 = (x-3)^2$$

admettra une pareille solution.

Or, sans qu'il faille y insister, la théorie de l'équation entière du second degré nous donne aisément pour x', racine désormais de l'équation (β), soit l'entier 2 soit l'entier 5.

Hosted by Google

Cependant la solution 2 ne satisfait pas à l'équation (α) dont les deux membres deviennent alors 1 et — 1.

Par suite cette solution lui est étrangère et l'équation (β), obtenue déductivement, n'est pas l'équivalente de (α), je veux dire n'a pas les mêmes racines uniquement.

Au contraire, avec la méthode réductive on voit qu'on ne déduira à rebours l'équation (α) de l'équation (β) qu'autant que son deuxième membre restera positif, tout comme le premier, sous l'influence d'une solution de (β), ce qui élimine d'avance toute racine inférieure à 3.

Nous avons, la dernière fois, porté cette critique que dans l'enseignement on n'insiste pas assez sur le choix d'une de ces deux méthodes. La raison semble en être que le plus souvent, dans les raisonnements, les propositions rencontrées sont *réciproques* ou mieux peuvent se *déduire réciproquement* les unes des autres, de telle sorte que la voie déductive ou la voie réductive reviennent cette fois au même.

Et dans ce fait peut-être trouverons-nous incidemment l'explication d'une erreur assez grossière qu'a commise *Descartes* à la fin de sa *Méthode*, lorsqu'il exprime, relativement à sa physique heureusement ! l'assertion suivante : « car il me semble que les raisons s'y entre-suivent en telle sorte que comme les dernières sont démontrées par les premières qui sont leurs causes, ces premières le sont réciproquement par les dernières qui sont leurs effets. » Mais ici l'assurance de la réciprocité est purement gratuite. Voilà où le dédain de la syllogistique conduisait notre philosophe qui ne se souciait guère sans doute qu'*Aristote* ait signalé que « du faux le syllogisme pouvait quelquefois déduire le vrai ».

Viète ne paraît pas plus heureux lorsqu'il se reporte à la définition de la méthode réductive qu'avait donnée Théon de Smyrne, le mathématicien alexandrin du IIe siècle après Jésus-Christ, qui nous a laissé l'ouvrage intitulé : *Choses qui en mathématiques sont utiles pour la lecture de Platon.* Il cite en effet : « Il est en mathématiques une méthode pour la recherche de la

Hosted by Google

vérité, que *Platon* passe pour avoir inventée (1), que *Théon* a nommée analyse et qu'il a définie ainsi : Regarder la chose cherchée comme si elle était donnée et marcher de conséquences en conséquences, jusqu'à ce que l'on reconnaisse comme vraie la chose cherchée. »

Et nous voilà ramenés malgré nous aux dénominations de synthèse et d'analyse pour désigner le mode déductif et le mode réductif.

Au point de vue historique, voici à leur sujet l'opinion compétente de *Paul Tannery* dont l'esprit critique était si aiguisé, opinion extraite de son ouvrage *La géométrie grecque* : « La méthode analytique qui est une méthode rigoureuse par réduction, en réalité identique à la méthode synthétique par déduction (comprenez : qui s'y ramène) n'est pas la même que l'analyse des Anciens, qui était déductive et était une sorte d'expérimentation sur la vérité à démontrer. »

Quoi qu'il en soit, le souci constant des géomètres grecs a été la synthèse, je veux dire la voie déductive, la plus sûre et la plus naturelle. Aussi après cette sorte d'analyse, cette manière d'expérimentation, venons-nous d'entendre, termineront-ils leurs recherches géométriques par la synthèse. Ainsi le témoignent les deux écrits : *Collections mathématiques* et les *Arithmétiques*, le premier dû à Pappus, le second à **Diophante**, mathématiciens alexandrins des IV^e^ et V^e^ siècles après Jésus-Christ.

Lagrange, le grand mathématicien-analyste de la fin du XVIII^e^ siècle, préconisa fortement l'emploi de la méthode analytique, qu'avaient favorisée du reste les travaux des *Viète*, des *Descartes*, des *Fermat*, des *Newton*, mais sans en signaler le caractère réductif, ce que fit, au siècle dernier, *Duhamel*, dans son ouvrage *Méthodes dans les sciences de raisonnement*.

Quant à la synthèse et à l'analyse plus proprement philosophiques, vous en connaissez les règles, pour les avoir lues dans la *Méthode* de *Descartes*.

(1) D'après un passage de sa *République*.

Hosted by Google

Voici son fameux précepte (le troisième des quatre préceptes classiques) se rapportant à la synthèse : « Conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître pour monter peu à peu comme par degrés jusques à la connaissance des plus composés, et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres. »

Le deuxième précepte définit l'analyse, avec quelque obscurité néanmoins : « Diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il serait requis pour les mieux résoudre. »

Enfin *Condillac* exigeait, aux termes de son analyse, qu'on décomposât un tout en ses parties pour en faire l'étude plus efficacement et y ramenait toute sa logique.

Passons à l'historique du raisonnement par l'absurde. Cette méthode « *ab absurdo* », comme disaient les scolastiques, date de fort loin. Selon la tradition, *Pythagore* s'en serait servi avant *Euclide* — celui-ci l'a véritablement mise en honneur — pour prouver l'incommensurabilité de la diagonale du carré avec son côté. Cette démonstration, que nous donnerons plus tard, révèle l'absurdité de la commensurabilité en faisant voir que sous cette hypothèse momentanée un entier serait à la fois pair et impair. *Archimède* en fit grand usage également.

Les dialecticiens grecs ne l'ignoraient certes point, ceux qu'on appelle les *sophistes* principalement, car ils s'en servaient pour prouver l'impossibilité du mouvement ou mieux de l'infini. Et n'est-il pas permis de supposer que cette méthode de *réduction à l'absurde*, pour la nommer différemment, se soit imposée d'elle-même à l'esprit quand il s'est agi d'aborder l'infini, son véritable domaine encore une fois ?

Dans tous les cas, les exemples abonderaient tant mathématiques que métaphysiques, qui confirmeraient notre manière de voir.

Pascal, dans son *Esprit géométrique*, dit à propos du concept de l'infini, traité par cette méthode : « Et c'est pourquoi, toutes

Hosted by Google

les fois qu'une proposition est inconcevable, il faut en suspendre le jugement et ne pas la nier à cette marque, mais en examiner le contraire ; et si on le trouve faux, on peut hardiment affirmer la première, tout incompréhensible qu'elle est. »

Arnauld et NICOLE, moralistes et logiciens, contemporains de *Pascal* et qui s'en sont profondément inspirés, accordent pourtant peu de crédit à la démonstration par l'absurde, qu'ils dénomment, dans leur *Logique de Port-Royal* : « démonstration par l'impossible ». *Arnauld*, d'esprit plus mathématique, y revient à nouveau dans ses *Nouveaux éléments de géométrie*, quand il écrit au sujet de cette démonstration, sans songer à la notion d'infini sans doute : « Si elle peut convaincre l'esprit en le mettant hors d'état de pouvoir douter qu'une chose soit, elle ne le satisfait pas pleinement en lui donnant toute la clarté qu'il peut raisonnablement désirer. »

Cette opinion n'est digne d'être retenue qu'autant que les autres modes démonstratifs s'appliquent, ce qui n'est pas toujours le cas.

Leibniz sera, par le mot de « contradictoire » qui convient seul à l'égard du mode en question, plus précis que *Pascal* qui employait seulement celui de « contraire ». Il écrit en effet au cours de sa *Monadologie* : « En vertu du principe de la contradiction nous jugeons vrai ce qui est opposé ou contradictoire au faux. »

Kant, Renouvier, pour ne citer enfin que ces deux philosophes, se sont servis, pour discuter l'infini métaphysique, de la méthode de réduction à l'absurde. Le premier dans ses classiques *antinomies* de la raison pure, à propos des limites à imposer à l'univers par exemple, conclut que notre raison ne peut le concevoir infini à cause du fini, ni fini à cause de l'infini.

Le second nie catégoriquement l'infini.

Nous en aurons terminé avec cette méthode, quand nous aurons ajouté que les logiciens actuels font, depuis *Hamilton* surtout, dont ils se réclament plus ou moins, la distinction indispensable entre le raisonnement par la contraire et le raisonnement par la contradictoire. La seule difficulté, quand il s'agira, avant tout, de

Hosted by Google

notions et non encore de propositions sur ces notions, sera de les définir nettement. Et, bien que nous n'ayons pas jusqu'ici traité le chapitre des définitions, vous savez d'ores et déjà qu'il existe des notions peu commodes, pour ne pas dire impossibles à définir véritablement, ne serait-ce que celle du *fini*.

Terminons en donnant les règles classiques de *Pascal* sur les démonstrations en général, règles que l'on retrouve presque mot à mot dans la *Logique de Port-Royal :*

1° « N'entreprendre de démontrer aucune des choses qui sont tellement évidentes d'elles-mêmes qu'on n'ait rien de plus clair pour les prouver. »

2° « Prouver toutes les propositions un peu obscures, et n'employer à leur preuve que des axiomes très évidents, ou des propositions déjà accordées ou démontrées .»

3° « Substituer toujours mentalement les définitions à la place des définis, pour ne pas tromper par l'équivoque des termes que les définitions ont restreints. »

Digression sur la loi de substitution des équivalents.

Désormais nous connaissons nettement les trois mécanismes du raisonnement à conclusion déductive. Aussi réfuterons-nous sans peine l'opinion suivante de *Claude Bernard* (lequel avons-nous vu, ne séparait guère la méthode déductive de la méthode inductive) : « Je pense qu'il n'y a pour l'esprit qu'une seule manière de raisonner, comme il n'y a pour le corps qu'une seule manière de marcher. »

Si l'on veut établir à toute force un vrai rapprochement entre les trois modes démonstratifs, on le trouvera dans la loi de la substitution des équivalents, signalée antérieurement. Cette loi, qualifiée abusivement du nom de principe, *Leibniz* en faisait un principe suprême de la logique bien plutôt que le principe du syllogisme. Elle fut essentiellement reprise par un logicien et économiste anglais Stanley Jevons, au siècle dernier.

Hosted by Google

Retrouvons à ce propos notre assimilation commode de la logique et de la mathématique.

Dans une proposition syllogistique le lien logique par excellence, la *copule* comme on dit, qui exprime l'attribution du prédicat au sujet est le verbe être. Ce verbe peut figurer explicitement.

Exemple : Tout homme *est* un animal.

Il peut figurer implicitement.

Exemple : Cet aimant attire le fer, qu'on remplace par : cet aimant *est* attirant le fer.

Eh bien, l'équivalent mathématique d'une telle copule consiste dans un ensemble de trois signes : le signe $=$ (égale), le signe $>$ (plus grand que), le signe $<$ (plus petit que).

De plus les deux derniers, ceux de l'inégalité, se ramènent au premier, à celui de l'égalité. Ainsi nous avons eu l'occasion de rappeler que l'inégalité $a > b$ équivalait à l'égalité $a = b + d$, où d désigne la différence positive entre a et b.

Or, le signe de l'égalité doit justement s'interpréter, la grande majorité des cas, dans le sens de l'*équivalence*.

Si l'égalité $a = a$, qui se rapporte proprement à l'*identité*, n'est guère féconde en elle-même, n'est en somme qu'une simple répétition, une tautologie comme disent les philosophes, au contraire les égalités

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2 \text{ droits}$$

(à propos des angles d'un triangle) etc..., qui se rapportent cette fois à la seule équivalence, permettent des *substitutions* productives, capables de faire avancer la science mathématique.

Egalement, s'il s'agit d'une équation à résoudre, on doit rechercher une équation dite équivalente, en un mot ayant uniquement les mêmes solutions que la proposée, mais mises en évidence.

Pour étudier de même l'équation d'un lieu de Géométrie analytique, on lui substitue finalement une équation plus simple, sans introduction d'équation parasite relative à quelque lieu

Hosted by Google

étranger à la question, autrement dit on lui substitue une équation équivalente.

Enfin, bien que dans un sens un peu différent, toute construction géométrique s'exécute par une série de constructions dont l'ensemble équivaut à la première.

C'est alors à ce point de vue que la spéculation mathématique sera soumise à cette loi de substitution.

Armés de cette loi, vous pourrez sans nulle hésitation condamner l'opinion de *Condillac*, pour qui le géomètre accomplirait soi-disant ses prodiges en répétant que « le même est le même » et surtout détruire la portée d'une affirmation de **Buffon**. Ce célèbre naturaliste et grand écrivain du XVIII^e^ siècle, philosophe à ses heures, a en effet commis les lignes suivantes : « Ce qu'on appelle vérités mathématiques se réduit à des identités d'idées et n'a aucune réalité. »

Qu'il y ait là exagération de pensée ou simple boutade de la part de *Buffon*, la Mathématique ne s'en occupe pas moins par bonheur d'autre chose que de l'identité, la « ridicule identité », selon l'expression opportune d'**Ampère**, le savant mathématicien et surtout physicien du début du XIX^e^ siècle, qui s'adonna aussi aux questions philosophiques et dont les légendaires distractions vous sont certainement restées en mémoire.

Hosted by Google

SIXIÈME LEÇON

DES DÉFINITIONS EN MATHÉMATIQUE

Ce n'est pas tout de connaître les premiers principes de la spéculation mathématique et la nature de ses démonstrations, il faut encore se préoccuper des notions, des objets de pensée qui forment la matière du raisonnement. Ces objets mathématiques sont créés par la *définition*.

Quand nous considérons, dans quelque démonstration, un nombre premier, un triangle équilatéral, etc..., nous devons manifestement en connaître la signification, nous devons pouvoir distinguer ces objets spéculatifs de tout autre qui ne se confond avec aucun d'entre eux, sinon le principe d'identité n'a plus sa raison d'être et la démonstration ne signifie plus rien. La définition a précisément pour but d'assurer une pareille spécification, de donner une réalité, subjective tout au moins, au sens philosophique du mot, à tel ou tel objet de pensée.

Une seule condition, mais absolue, sera requise pour la validité d'une définition : c'est qu'elle n'implique pas de contradiction, en d'autres termes, que *l'objet défini* soit *possible*.

Ainsi, en songeant qu'un nombre entier pair est un nombre multiple de 2 et aussi qu'un nombre premier n'est multiple d'aucun nombre (sauf de lui-même et de l'unité bien entendu), il serait contradictoire, donc impossible, de définir des espèces de nombres entiers qui seraient à la fois pairs et premiers, en exceptant toutefois le nombre 2.

La définition pourra même être superflue dans ses termes pourvu qu'elle ne soit pas contradictoire. Ce ne sera pas une

Hosted by Google

bonne définition sans doute, mais elle n'en restera pas moins légitime.

Ainsi il est connu que lorsque deux triangles ont leurs angles égaux chacun à chacun, leurs côtés sont proportionnels deux à deux. Dès lors, il sera possible de définir, sans absurdité proprement dite de contradiction : deux triangles semblables sont deux triangles qui ont leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels, élément à élément. Cette définition est encore fréquente dans l'enseignement, livresque ou oral.

Une question se pose dès maintenant. Tous les objets, toutes les notions de spéculation mathématique, peuvent-ils être définis ? Autrement dit, n'existe-t-il pas des notions qu'on sait caractériser le mieux possible et qui pourtant restent indéfinissables, en toute rigueur ? La réponse, depuis *Pascal*, est devenue une banalité. Oui, on ne peut tout définir, en mathématiques comme ailleurs, ne serait-ce que le premier mot qu'on emploierait pour définir le premier objet.

Nous distinguerons dès lors deux sortes de définitions mathématiques. Les unes sont de vraies définitions, en ce sens qu'elles précisent une propriété caractéristique (1) de l'objet défini et qu'on peut *démontrer* en outre l'*existence* de l'objet défini. Les autres précisent le mieux possible l'objet défini, *sans démonstration* possible de l'existence de cet objet.

Il est regrettable qu'on n'ait pas imaginé deux termes différents pour différencier ces deux espèces de définitions. Aussi bien le souci de cette distinction ne remonte pas très haut dans l'histoire de la pensée mathématique et nous nous contenterons de dire que les premières définissent et les dernières *caractérisent*. Celles-ci devraient se désigner de préférence alors sous le nom de *caractérisations*.

Le nombre entier, la ligne droite, le plan ne peuvent être que caractérisés, et cela, vous le concevez sans peine, de bien des manières différentes. La notion de l'infini ou même la notion du

(1) On distinguera, à propos, les *propriétés de définition* et les *propriétés de démonstration* des objets mathématiques.

Hosted by Google

fini, sa contradictoire, pourra être, quoi qu'on en pense, plutôt caractérisée que définie. A plus forte raison, si, nous éloignant un peu des mathématiques pures, nous nous adressions à la mécanique rationnelle, nous y trouverions les notions primordiales de *temps* et de *masse* qui sont simplement susceptibles de caractérisation.

Au contraire et heureusement le plus grand nombre des objets mathématiques possèdent une véritable définition. En voici quelques exemples.

1° Une fois acquises les notions de droite, de segments égaux, d'angle, de triangle, le triangle isoscèle se définit comme ayant deux côtés égaux. L'existence géométrique d'un tel triangle est de démonstration immédiate. Il suffira en effet d'assurer qu'on peut construire un triangle isoscèle ; la construction se réalise en portant sur les côtés indéfinis d'un angle deux segments égaux ayant une extrémité commune au sommet de l'angle et de joindre par une droite les deux autres extrémités.

2° Le triangle équilatéral se définit comme ayant ses trois côtés égaux. Une pareille figure est-elle possible ?

Avant de répondre, rappelons-nous que dans un triangle ABC la somme des angles $A + B + C$ vaut deux angles droits, et encore qu'à deux côtés égaux sont opposés deux angles égaux et réciproquement. Alors chacun des angles d'un triangle équilatéral, si ce dernier existe, vaudra deux tiers d'angle droit.

Cela rappelé, construisons comme on vient d'indiquer, un triangle isoscèle ABC, en partant d'un angle, A, par exemple, égal à deux tiers de droit (ce qui est possible). Dans ces conditions les angles B et C, forcément égaux, vaudront chacun deux tiers de droit manifestement, et dès lors l'égalité des angles entraînera celle des côtés.

3° Un *nombre parfait* se définit comme un entier égal à la somme de tous ses diviseurs, en exceptant pour diviseur l'entier lui-même. Existe-t-il des nombres parfaits? La réponse est affirmative dès qu'on a remarqué que l'entier 6, admettant pour

Hosted by Google

diviseurs 1, 2, 3, en est la somme. Est-ce le seul nombre parfait ? Non, car l'entier 28, de diviseurs 1, 2, 4, 7, 14, est encore la somme de ses diviseurs. Y en a-t-il d'autres et mieux existe-t-il une loi de formation qui les fournisse tous ? Certes on sait en former beaucoup d'autres, mais on ne connaît pas de loi générale de formation, à l'heure actuelle dans tous les cas. D'ailleurs, pour le problème en apparence plus simple de la formation des nombres premiers absolus on ne connaît pas davantage de formule générale. Signalons malgré tout une expression particulière connue d'*Euclide* — on la trouve, bien qu'imparfaitement symbolisée encore, dans ses *Éléments* — et qui donne autant de nombres parfaits qu'il se rencontre de nombres premiers de la forme $2^n - 1$. Cette expression est

$$2^{n-1}(2^n - 1).$$

Supposons en effet $2^n - 1$ premier, pour une valeur convenable de l'entier n, et démontrons que son produit par 2^{n-1} est égal à la somme de tous les diviseurs possibles, inférieurs à ce produit.

Les diviseurs sont manifestement

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^{n-3},\quad 2^{n-2},\quad 2^{n-1};$$
$$(2^n - 1),\quad 2(2^n - 1),\quad 2^2(2^n - 1),\ \cdots,\ 2^{n-3}(2^n - 1),\quad 2^{n-2}(2^n - 1).$$

Ils ont pour somme

$$(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-3} + 2^{n-2} + 2^{n-1}) + (2^n - 1)(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-3} + 2^{n-2}).$$

Mais en vertu de la formule qui fournit la somme des termes d'une *progression géométrique*, on aura successivement

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = \frac{2^{n-1} \times 2 - 1}{2 - 1} = 2^n - 1,$$

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-3} + 2^{n-2} = \frac{2^{n-2} \times 2 - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} - 1.$$

La somme des diviseurs devient désormais

$$2^n - 1 + (2^n - 1)(2^{n-1} - 1)$$

ou

$$(2^n - 1)(1 + 2^{n-1} - 1)$$

Hosted by Google

ou enfin $2^{n-1}(2^n - 1)$,

qui reproduit bien l'expression annoncée.

Ces trois exemples vous auront montré que la démonstration de l'existence de l'objet défini dans chaque cas présente plus ou moins de difficulté.

La définition sera d'autant meilleure qu'on pourra la légitimer de la sorte d'autant plus aisément. Du reste, même pour les définitions véritables, il faut se garder de croire qu'il n'y a qu'une seule façon de définir l'objet qui lui est soumis. Dans ce sens la définition peut rester *arbitraire*.

Pour mettre ce nouveau caractère en évidence, considérons un triangle isoscèle, c'est-à-dire qui a deux côtés égaux. Cet objet de pensée géométrique est possible et l'imposition du nom fort rationnelle, puisque le mot isoscèle(1) venant de ἴσος, égal, et de σκέλος, jambe, fait image. Mais nous savons d'autre part que si un triangle a deux côtés égaux, il a deux angles égaux et *vice versa*. Donc on pourrait définir tout aussi logiquement un triangle isoscèle : celui qui a deux angles égaux. Sa possibilité d'existence serait encore fort simple à justifier par une construction très aisée d'un triangle répondant à la question. Dans ce cas vaudrait-il mieux cependant remplacer la dénomination d'isoscèle par celle d'*isogonal* qui fait songer à γωνία, angle.

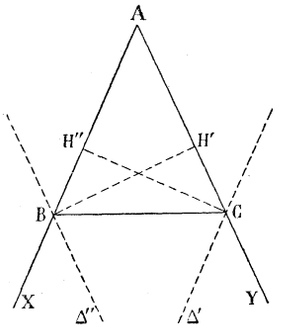
Quoi qu'il en soit, ces deux définitions, légitimes toutes deux, s'équivalent comme énonçant l'une et l'autre une propriété *caractéristique* du triangle isoscèle ou isogonal ; en termes plus précis, le fait pour un triangle d'être isogonal caractérise désormais le triangle isoscèle, et réciproquement le fait pour un triangle d'être isoscèle caractérise le triangle isogonal.

De même, le fait pour un triangle d'avoir deux hauteurs, ou deux médianes, ou deux bissectrices égales étant caractéristique du triangle isoscèle, parce que réciproque (nous démontrerons plus ou moins péniblement ces diverses réciproques en digression, à la fin de la leçon) on pourrait s'en servir pour définir différemment un pareil triangle. Mais chaque définition nouvelle serait

(1) On écrit aussi : isocèle.

Hosted by Google

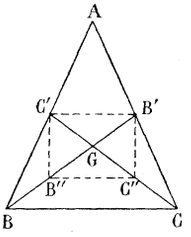
assez mauvaise car, premièrement, elle utiliserait un élément nouveau à définir au préalable, savoir : la hauteur, ou la médiane, ou la bissectrice, et, deuxièmement, la démonstration de l'existence du triangle correspondant n'irait pas sans quelque difficulté.



En effet, construisons d'abord un triangle à deux hauteurs égales. Partons d'un angle XAY. Traçons parallèlement aux côtés deux droites Δ' et Δ'' sécantes respectivement à AY et AX, à la même distance de AX et AY. Les points de rencontre B et C constituent avec A un triangle à deux hauteurs égales, puisque $BH' = CH''$ comme hauteurs mesurées par la distance commune des parallèles.

Construisons ensuite un triangle à deux médianes égales.

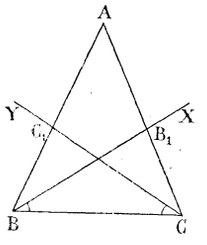
Cette fois, il faut connaître auparavant que le point commun à deux médianes de triangle détermine sur chacune d'elles deux segments dont l'un est double de l'autre. Cela posé, on construit d'abord un triangle isoscèle BCG. Puis on prolonge BG et CG de deux segments GB′ et GC′ égaux à la moitié de BG ou de CG. On joint enfin BC′ et CB′ qui se coupent en A. Le triangle ABC répond à la question, c'est-à-dire BB′ et son égal CC′ sont médianes. Pour le prouver, relions B″ et C″, milieux de BG et CG, ainsi que B′ et C′. La figure B′C′B″C″ est un parallélogramme, puisque les diagonales B′B″ et C′C″ se coupent en leur milieu G. De plus B″C″ est parallèle à BC et égal à sa moitié, d'après un théorème connu relatif au segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle. Donc B′C′, parallèle à son tour à BC et égal à sa moitié, s'appuie forcément sur les milieux des côtés AC et AB (d'après la réciproque du théorème).



Hosted by Google

Construisons en dernier lieu un triangle à deux bissectrices égales.

Soit un segment BC et deux demi-droites BX et CY faisant en B et C, avec le segment, des angles égaux. Puis construisons BA et CA faisant des angles égaux, doubles des précédents. Le triangle ABC répond à la question si l'on démontre que $BB_1 = CC_1$. Pour cela il suffit d'observer que les deux triangles BCB_1 et BCC_1 sont égaux puisque ayant un côté commun adjacent à deux angles de l'un égaux aux angles de l'autre.



Critique et histoire.

Il est de règle en logique de séparer les *définitions de mots* ou *nominales*, qui donnent le sens plus ou moins arbitraire qu'on attribue conventionnellement à un mot, des *définitions de choses*, qui donnent sans arbitraire véritable cette fois le sens ou mieux la marque caractéristique d'une chose, d'un objet de pensée. Cette tradition remonterait non pas tant à l'exemple d'*Aristote* — nous verrons pourquoi tout à l'heure — qu'à celui des logiciens de *Port-Royal*, *Arnauld* et *Nicole*, lesquels reprirent la logique aristotélicienne, à un point de vue nouveau, sous l'influence cartésienne, et furent nettement inspirés par *Pascal*. On trouve en vérité dans leur *Logique* ou *l'Art de penser* un chapitre intitulé : « Que les géomètres semblent n'avoir pas toujours bien compris la différence qu'il y a entre les définitions de mots et les définitions de choses » qui nous apprend que les premières sont « incontestables », comprenez : doivent être acceptées comme une question de fait, sans autre importance d'ailleurs, et les deuxièmes « contestables », comprenez : peuvent prêter à controverse, si elles ne sont pas judicieuses. Plus loin, suit une

Hosted by Google

discussion critique que nous reproduisons à peu près fidèlement : « car j'en vois qui disputent de ces définitions de mots avec la même chaleur que s'il s'agissait des choses mêmes. Ainsi l'on peut voir dans certains commentaires sur *Euclide* une longue dispute et fort échauffée entre deux géomètres, touchant l'espace compris entre une circonférence et sa tangente, que l'un prétend n'être pas un angle, au lieu que l'autre soutient que c'en est un. Qui ne voit que tout cela se pouvait terminer en un mot, en se demandant l'un à l'autre ce qu'il entendait par le mot d'angle ? »

La distinction en cause paraît à tout le moins exagérée ; le mot ne saurait guère exister sans la chose qu'il remémore. Les définitions nominales, si tant est qu'il s'en présente de caractérisées, apparaissent comme de pures dénominations. Le plus souvent elles reviennent aux dernières dès que le mot a quelque importance, sert de *substitut* à une chose.

Condillac, dont la *Logique* est postérieure à celle de *Port-Royal*, a écrit du reste : « Toute définition de mot est en somme une définition de chose. »

En mathématiques surtout la distinction ne s'impose pas. Il s'agit en effet d'y définir constamment un objet de pensée, une chose, idéale sans doute, de façon à la reconnaître de toute autre chose. L'essentiel, voulait *Pascal*, c'est d'avoir l'intelligence nette de l'objet défini. *Pascal* s'attache bien plus à l'idée qu'au mot, aux choses qu'aux « impositions » — le mot est de lui — de noms à ces choses. Si un inconvénient résulte du choix arbitraire du nom, il donne un remède infaillible là-contre : « Substituer mentalement la définition à la place du défini. » Enfin n'a-t-il pas dit ; « On ne reconnaît en géométrie que les définitions de noms », voulant entendre par là qu'il n'y avait pas lieu de faire une distinction entre deux sortes de définitions ? Cette pensée a été reprise depuis, quelquefois un peu inconsidérément, en s'en tenant à la lettre plutôt qu'à l'esprit.

Pour toutes ces raisons, et nous en tenant au contraire à l'esprit de la définition plutôt qu'à la lettre, nous préférons différen-

Hosted by Google

cier les définitions et les caractérisations mathématiques, selon que l'objet défini est ou n'est pas susceptible de démonstration d'existence.

Dans le premier cas, les épithètes ne manquent pas : la définition sera dite *réelle*, *causale*, par *génération* ou *génétique*, selon un terme de philosophie récent.

Ces deux dernières épithètes, si voisines, indiquent bien qu'il s'agit d'un objet qu'on a su créer, désormais possible.

Au fond, caractérisations et définitions correspondent aux définitions signalées par *Aristote*, dans ses *Derniers analytiques*, non lorsqu'il considère les définitions nominales et de choses mais bien plutôt lorsqu'il se pose la question du « que » et du « pourquoi » dont nous avons parlé à propos de la démonstration. Au surplus, la démonstration vient au secours de la définition, la justifie si on veut en expliquant la génération de l'objet défini. Et n'est-ce pas de cette définition parfaite que *Leibniz* disait en substance : « La définition doit comprendre les conditions nécessaires et suffisantes pour démontrer toutes les propriétés de l'objet défini » ? Par ailleurs, celui-ci soutenait, avec trop de témérité, qu'il fallait n'admettre aucun mot sans définition ni aucune proposition sans démonstration.

Mais, nous le répétons, le souci de faire suivre la définition, si possible, de la démonstration d'existence de l'objet, est moderne.

Si une définition proprement dite reste arbitraire, mais seulement dans une faible mesure — le cas échéant on se laissera guider par la simplicité et la brièveté —, arbitraire au sens où nous l'avons expliqué bien entendu, cette restriction n'existe plus pour la caractérisation. L'essentiel sera de ne pas impliquer de contradiction.

Voici, à titre de document, les principales caractérisations proposées pour la ligne droite.

1° *Platon* la définissait ou croyait la définir ainsi : « La droite est la ligne dont les points milieux ombragent les extrêmes. » Vous apercevez de la sorte son allusion à la propagation rectiligne de la lumière.

Hosted by Google

2° *Euclide* la caractérisait : « celle qui est également placée aux points qui sont en elle ».

3° LEGENDRE (en 1794, il publia ses *Eléments de géométrie*, au succès retentissant et qui remplacèrent (1) ceux d'*Euclide*) disait : « La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre. »

4° *Leibniz* écrivait : « La droite est la ligne telle que si l'on immobilise deux de ses points, tous les autres sont immobiles par cela seul. »

5° *Duhamel* s'éleva avec raison contre la pseudo-définition de *Legendre*, laquelle énonce une propriété de la droite résultant aujourd'hui de notions antérieures et plus simples.

Il formulait : « La droite est une ligne indéfinie telle que par deux points donnés on n'en peut faire passer qu'une. » C'est la caractérisation courante actuelle, bien que certains auteurs en proposent parfois de nouvelles, comme par exemple : « ligne qui par une certaine rotation n'engendre aucune surface ni aucun volume » ou encore : « ligne d'une figure dont les points restent immobiles pendant que tous les autres se meuvent ».

Un nouveau caractère, peu important à la vérité, est, pour une définition ou une caractérisation, d'être *positive* ou *négative*. Mais on substituera plus ou moins facilement à celle-ci une définition ou caractérisation positive.

Exemple : Deux droites parallèles sont deux droites qui ne se rencontrent pas, ou bien par substitution indiquée, deux parallèles sont deux droites partout équidistantes.

Exemple : Un nombre entier infini, ou indéfini si on préfère, ne peut être le dernier entier formé ; ou bien, un entier indéfini se forme en ajoutant 1 à un entier déjà formé.

Exemple : Deux entiers sont dits premiers entre eux quand ils n'ont pas de diviseur commun, si ce n'est l'unité ; ou alors, deux entiers premiers entre eux sont ceux qui admettent 1 pour plus grand commun diviseur.

Enfin, signalons que la tendance de l'école logique actuelle est

1. Déjà les *Nouveaux Éléments* d'*Arnauld* avaient ébranlé le crédit de ceux d'*Euclide* et contenaient la même définition que les *Eléments* de *Legendre*.

Hosted by Google

de voir dans les définitions mathématiques plutôt des *définitions d'idées*. N'est-ce pas confirmer, avec le formalisme de plus en plus complet de cette école, formalisme qui commence d'envahir la mathématique en pénétrant par ses fondements, cette opinion de quelque crédit : « Dans ses opérations la logique part d'une définition, la métaphysique d'une idée » ? Ce fait nous surprendra moins si nous nous rappelons que depuis le criticisme, depuis surtout la *Logique* de *Hégel* qui, nous l'avons dit, n'est qu'une métaphysique, logique et métaphysique se rejoignent. En tout cas, nous devons indiquer qu'on y distingue les définitions par *abstractions*, telles sont celles de la longueur, de la température, par exemple, et aussi les définitions par *postulats*, où l'on postule à l'avance les propriétés fondamentales et non contradictoires qui suffisent à caractériser l'idée à définir. Nous en verrons prochainement un exemple, avec le nombre entier caractérisé, plutôt que défini bien entendu par cette méthode. Les véritables définitions, celles qui utilisent les notions acquises pour définir une notion nouvelle, qui se servent de symboles antérieurs pour en créer de nouveaux, portent le nom de définitions *nominales* (nous les appelions, préférablement, définition de chose, en tant que création d'objet de spéculation).

Avant de terminer, faisons observer que nous nous sommes occupés de définitions ou caractérisations spéculatives, que l'esprit construit *a priori*, sous les conditions examinées. Il est bon d'ajouter que, dans une science en voie de formation, les définitions s'élaborent par une sorte de synthèse, d'après l'expérience.

C'est ainsi que les objets de la géométrie primitive, avant d'être dépouillés comme aujourd'hui de leur origine plus ou moins concrète, étaient suggérés empiriquement, pour ainsi dire. M. *Liard* a étudié cette question dans son ouvrage : *Des définitions géométriques et des définitions empiriques*.

Et terminons maintenant avec *Pascal*. Pour lui, il existe des concepts indéfinissables : ceux du temps, de l'espace, du nombre, de l'être, et ce serait les obscurcir que d'essayer sur eux une définition.

Hosted by Google

Il est préférable de les connaître, de les concevoir, par l'usage de cette « lumière naturelle » si chère à *Pascal*, et à *Descartes* également, qui à défaut de « preuves » nous tient lieu d'évidence. La méthode idéale qui consisterait à tout définir, comme aussi à tout prouver, il la déclare impossible « car, écrit-il, il est évident que les premiers termes qu'on voudrait définir en supposeraient de précédents pour servir à leur explication, et que de même les propositions qu'on voudrait prouver en supposeraient d'autres qui les précédassent». En cela, il obéit au fond au principe aristotélicien, prescrivant qu'on doit de toute nécessité s'arrêter à un moment donné. Aussi donne-t-il pour les définitions des règles qui se retrouvent approximativement dans la logique de Port-Royal.

1° « N'entreprendre de définir aucune des choses tellement connues d'elles-mêmes, qu'on n'ait point de termes plus clairs pour les expliquer. »

2° « N'omettre aucun des termes un peu obscurs ou équivoques sans définitions. »

3° « N'employer, dans la définition des termes, que des mots parfaitement connus, ou déjà expliqués.»

Digression sur la réciprocité en mathématiques.

Nous nous étions occupés, l'avant-dernière leçon, de ce que nous appelions la « loi de réciprocité », relative à certaines propriétés mathématiques, qui étaient traduites par des propositions réciproques, ou mieux, susceptibles de réciprocité. Nous appellions ces propriétés caractéristiques des divers cas considérés, et nous démontrions, du reste, la loi par le raisonnement de réduction à l'absurde. L'importance de la notion de réciprocité est considérable en mathématiques et elle n'a pas échappé aux philosophes, qui ont pu s'en servir pour leurs spéculations métaphysiques également. Ainsi *Descartes* remarquera dans ses *Regulæ* que

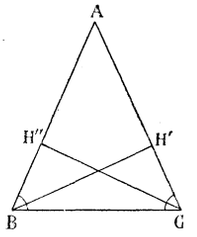
Hosted by Google

toutes les propositions nécessaires ne sont pas réciproques. Comme exemple il partira de cette proposition qu'il juge nécessaire : « Je suis, donc Dieu est » et observera que la réciproque est « contingente », je veux dire, non nécessaire. Il dira textuellement : « Quoique de ce que je suis, je conclus avec certitude que Dieu est, je ne puis réciproquement affirmer, de ce que Dieu est, que j'existe ». Pour prendre un exemple moins contingent ! rappelons-nous que tout polygone régulier est inscriptible dans une circonférence mais que la réciproque n'est pas vraie : tout polygone inscriptible dans une circonférence n'est pas forcément régulier.

En de nouveaux termes, dès qu'un polygone est régulier il est nécessaire qu'il soit inscriptible, ou la condition de son inscription suit nécessairement ; mais s'il est inscriptible cela ne suffit pas pour que le polygone soit régulier. En résumé la condition de son inscriptibilité (pourrait-on dire aussi) est une condition *nécessaire* mais non *suffisante*.

Pour que la condition soit à la fois nécessaire et suffisante, il faut qu'elle possède le *caractère de réciprocité* : on dit alors qu'elle est caractéristique, précisément.

Revenons maintenant, ainsi que nous l'avons annoncé ci-dessus, sur les propriétés caractéristiques du triangle isoscèle. Des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un triangle soit isoscèle sont ou qu'il soit isogonal, ou qu'il ait deux hauteurs, ou deux médianes, ou deux bissectrices égales. Laissons de côté la première condition par trop immédiate et passons à la deuxième.

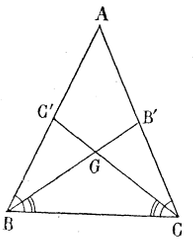


Soit ABC un triangle isoscèle et les deux hauteurs BH′ et CH″. Les deux triangles BCH′ et BCH″ sont deux triangles rectangles égaux puisque l'hypoténuse BC est commune et que les angles aigus C et B sont égaux. Donc BH′ = CH″.

Réciproquement, si BH′ = CH″ les deux triangles rectan-

Hosted by Google

gles sont égaux pour une autre raison, et les angles en B et C, donc les côtés AC et AB sont égaux.



Considérons la troisième condition caractéristique de l'égalité des médianes.

D'abord la condition est nécessaire, car si on a AB = AC, on a aussi BC′ = CB′ pour leurs moitiés.

De plus $\widehat{B} = \widehat{C}$. Donc les deux triangles BCB′ et BCC′ sont égaux et BB′ = CC′.

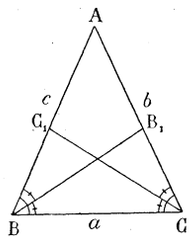
Ensuite la condition BB′ = CC′ est suffisante.

En effet BB′ et CC′ étant deux médianes égales, leurs deux tiers BG et CG sont égaux et le triangle BCG est isoscèle. Par suite $\widehat{CBB'} = \widehat{BCC'}$ et les triangles BCB′, BCC′ deviennent égaux pour une nouvelle raison. On en conclut l'égalité $\widehat{B} = \widehat{C}$ ou alors AB = AC.

Prenons enfin la propriété caractéristique de l'égalité des bissectrices.

Si $\widehat{B} = \widehat{C}$, on a $\frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{2}$ ou $\widehat{CBB_1} = \widehat{BCC_1}$,

et les deux triangles BCB_1, BCC_1 sont égaux, par suite $BB_1 = CC_1$: les bissectrices sont égales. La réciproque, cette fois, présente quelque difficulté de démonstration.



Voici en première ligne la démonstration que l'on propose de faire habituellement, mais qui a l'inconvénient d'utiliser des expressions assez compliquées, peu élémentaires, fournissant les mesures des bissectrices en fonction de celles des côtés. Désignons celles-ci par a, b, c pour abréger. Les expressions en question sont

$$\overline{BB_1}^2 = ac - b^2\frac{ac}{(a+c)^2}, \qquad \overline{CC_1}^2 = ab - c^2\frac{ab}{(a+b)^2}.$$

Hosted by Google

Par hypothèse on a $BB_1 = CC_1$, par suite on aura

$$ac - b^2 \frac{ac}{(a+c)^2} = ab - c^2 \frac{ab}{(a+b)^2}$$

ou $$a(b-c) = abc\left[\frac{c}{(a+b)^2} - \frac{b}{(a+c)^2}\right]$$

ou $$b - c = bc\,\frac{c(a+c)^2 - b(a+b)^2}{(a+b)^2(a+c)^2}. \qquad (\alpha)$$

Or $$c(a+c)^2 - b(a+b)^2 = ca^2 + 2ac^2 + c^3 - ba^2 - 2ab^2 - b^3$$
$$= a^2(c-b) + 2a(c^2 - b^2) + c^3 - b^3.$$

Mais on se rappelle que l'on a

$$c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$$

et aussi $$c^3 - b^3 = (c-b)(c^2 + cb + b^2).$$

Donc l'égalité (α) devient

$$b - c = bc\,\frac{a^2(c-b) + 2a(c-b)(c+b) + (c-b)(c^2 + cb + b^2)}{(a+b)^2(a+c)^2}$$

ou $$(b-c) + (b-c)bc\,\frac{a^2 + 2a(c+b) + c^2 + cb + b^2}{(a+b)^2(a+c)^2} = 0$$

ou $$(b-c)\left[1 + bc\,\frac{a^2 + 2a(c+b) + c^2 + cb + b^2}{(a+b)^2(a+c)^2}\right] = 0,$$

et comme l'expression entre crochets ne peut être nulle, d'après sa forme qui fournit un nombre positif, il faut que

$$b - c = 0 \qquad \text{ou} \qquad b = c. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

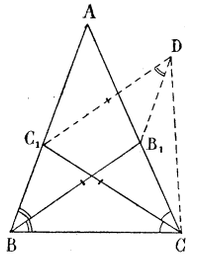
En deuxième ligne, nous indiquerons une démonstration plus élémentaire, par l'absurde.

Supposons pour un moment $\widehat{B} > \widehat{C}$ ou $\frac{\widehat{B}}{2} > \frac{\widehat{C}}{2}$, c'est-à-dire en particulier $\widehat{CBB_1} > \widehat{BCC_1}$.

Dans les deux triangles BCC_1 et BCB_1, où $BB_1 = CC_1$ par hypothèse et où BC est commun, les côtés opposés aux angles inégaux sont inégaux et au plus grand angle est opposé, comme on sait, le plus grand côté. Donc on a $CB_1 > BC_1$.

Hosted by Google

Construisons le parallélogramme BB_1DC_1 ; on en déduit $C_1D = BB_1 = CC_1$; le triangle CC_1D est isoscèle et l'on a



$$\widehat{C_1CD} = \widehat{C_1DC}. \qquad (1)$$

Or $CB_1 > B_1D$ car $B_1D = BC_1$, par suite le triangle CB_1D indique que l'on aura

$$\widehat{CDB_1} > \widehat{B_1CD}. \qquad (\alpha)$$

En outre $$\widehat{B_1DC_1} > \widehat{B_1CC_1} \qquad (\beta)$$

(car $\frac{\widehat{B}}{2} > \frac{\widehat{C}}{2}$ et $\frac{\widehat{B}}{2} = \widehat{B_1DC_1}$).

Ajoutons les inégalités (α) et (β), de même sens, il vient *a fortiori*

$$\widehat{CDB_1} + \widehat{B_1DC_1} > \widehat{B_1CD} + \widehat{B_1CC_1}$$

ou $$\widehat{CDC_1} > \widehat{DCC_1},$$

inégalité en contradiction avec (1).

De même on ne pourrait supposer $\widehat{B} < \widehat{C}$. Il reste donc la seule supposition $\widehat{B} = \widehat{C}$, qui n'implique pas de contradiction et qui devient la conclusion proprement dite de la proposition où l'hypothèse est l'égalité des bissectrices.

Nous avons insisté sur ces exemples pour bien montrer qu'on risquerait de tomber dans l'erreur si on affirmait, de propos délibéré, que toute proposition vraie admet une réciproque vraie, et mieux qu'il n'est pas indifférent pour la bonne qualité de la définition d'un objet mathématique de s'adresser à la plus convenable de ses propriétés caractéristiques.

Hosted by Google

SEPTIÈME LEÇON

DES AXIOMES ET DES POSTULATS EN MATHÉMATIQUE ET EN PHILOSOPHIE

Critique et histoire.

Nous allons nous entretenir aujourd'hui d'une question qui sert de complément indispensable à celle des définitions, de la question des axiomes et des postulats, d'autant mieux que nous avons quelquefois eu recours à ces notions en les supposant suffisamment acquises.

Un *axiome mathématique* est une proposition évidente par elle-même. Si l'on objecte que l'évidence comporte un caractère purement subjectif, personnel je veux dire, nous nous contenterons, pour l'instant, d'ajouter qu'en tout cas la vérité d'un axiome n'est pas susceptible d'être assurée par démonstration. Toute démonstration qu'on tenterait dans ce but se réduirait à une pure tautologie. Le mot grec ἀξίωμα, signifiant proposition et venant du verbe ἀξιῶ, je pense, je juge, explique assez pourquoi ce terme d'axiome a été réservé aux propositions par excellence, celles qui s'imposent d'elles-mêmes à l'esprit. Tel est le principe d'identité, A est A, l'axiome des axiomes. Tel est le principe de contradiction, A n'est pas non A, qui complète — nous le savons suffisamment — celui d'identité.

Telle est encore, vis-à-vis de la presque totalité des mathématiciens (d'aucuns y voient cependant plutôt un postulat) la proposition : deux figures égales à une troisième, ou susceptibles de coïncider avec elle, sont à leur tour égales entre elles.

Hosted by Google

Signalons au surplus ce qu'on appelle les *axiomes de l'égalité*, symbolisés comme il suit :

1° $a = a$; 2° $a = b$, $b = a$; 3° $a = b$, $b = c$, $a = c$,

et qui traduisent au fond l'axiome d'identité.

Ils donnent lieu du reste à ce qu'on nomme présentement en logique la propriété *réflexive*, la propriété *symétrique* et la propriété *transitive* de l'égalité.

Nous disions que l'évidence a un caractère éminemment subjectif. Justement *Leibniz* qui, vous vous en souvenez, critiqua la théorie cartésienne bien connue de l'évidence, avait essayé de démontrer les axiomes de l'égalité. Cette prétention ne nous étonnera pas outre mesure si nous nous rapportons à l'une de ses pensées. « C'est une de mes grandes maximes, énonce-t-il, qu'il est bon de chercher les démonstrations des axiomes mêmes. »

Quant au *postulat,* il apparaît comme une proposition non évidente d'elle-même, mais qu'on demande d'admettre malgré tout sans démonstration. On lui substitue, assez rarement, le nom de *demande*.

Sans encourir cette fois le reproche de la tautologie, on pourra risquer une explication, sinon une démonstration pour rendre acceptable la légitimité du postulat. On le regardera d'ailleurs, si on veut se mettre à l'abri de toute critique, comme une pure hypothèse, ou comme une convention.

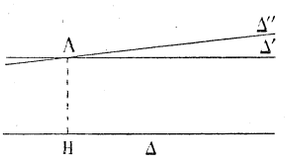
Le mot lui-même vient du latin : *postulatum*, chose demandée. Ce dernier se retrouve dans l'expression consacrée de « *postulatum d'Euclide* ».

Puisque l'occasion le permet, insistons sur ce fameux postulat, dont *d'Alembert* disait spirituellement : « Le *postulatum* des parallèles fait depuis tant de siècles le scandale de la géométrie et le désespoir des géomètres. » Je vous rappelle son énoncé actuel, équivalent à l'énoncé euclidien bien entendu. Par un point extérieur à une droite on peut faire passer une parallèle à cette droite, *mais on n'en peut faire passer qu'une*. C'est la restriction finale qui constitue proprement le postulat.

Hosted by Google

Chez *Euclide*, dès que deux droites ne faisaient plus avec une même troisième deux angles adjacents du même côté supplémentaires, elles se rencontraient (du côté où la somme des angles en question était inférieure à deux droits). Si donc, ayant mené par le point extérieur une première parallèle à la droite, nous les coupons par une sécante commune, nous obtenons, on le sait, deux angles adjacents, du même côté de la sécante, supplémentaires. Toute autre droite issue du point donnera lieu à des angles non supplémentaires et rencontrera alors la droite proposée.

Avec ce postulat nous entrons dans le domaine de l'infini, et peut-être y manquerons-nous d'assurance. Si vous le voulez, nous allons faire un essai de logique à ce sujet.



Soit Δ une droite et A un point extérieur. Menons AH perpendiculaire sur Δ. Vous savez — et il s'agit naturellement ici d'une figure de géométrie plane — qu'il n'y en a qu'une seule possible. Puis menons par A la seule perpendiculaire possible Δ′ à HA.

Les droites Δ et Δ′ toutes deux perpendiculaires à AH seront parallèles entre elles (nous avons démontré ceci antérieurement à l'occasion de la réduction à l'absurde). Dès lors la première partie de l'énoncé précédent est assurée, puisque par A passe Δ′ parallèle à Δ.

Mais portons notre attention sur ce fait que les droites AH et Δ′ étaient uniques dans nos constructions. Il apparaîtra, à première vue, que Δ′ est la *seule* droite issue de A parallèle à Δ. Le *postulatum* semble donc de toute évidence. Serait-il un axiome, de préférence ? Loin de là, nous venons de conclure à l'existence d'une parallèle unique en utilisant un procédé unique de construction, et rien ne nous dit que tout autre procédé ne donnerait pas une autre parallèle !

Poursuivons davantage notre investigation. En nous fiant à nos souvenirs plutôt qu'à l'ordre logique d'enchaînement des théorèmes élémentaires sur la perpendicularité et le parallélisme,

Hosted by Google

nous découvrons aussitôt cette proposition : une perpendiculaire à une droite est perpendiculaire à toute parallèle à cette droite.

Essayons de nous en servir pour démontrer le postulat. Nous disons : quelque autre parallèle Δ'' à Δ menée par A, au moyen d'une autre construction, ne peut différer de Δ', puisque AH deviendrait perpendiculaire sur Δ'' et qu'il est absurde qu'il y ait, passant par A, deux perpendiculaires distinctes Δ' et Δ'' à AH.

Le malheur, c'est que cette proposition auxiliaire impliquant le postulat, nous avons fait, ni plus ni moins, un cercle vicieux. Reprenons-en en effet la démonstration. Partons de Δ et Δ' parallèles, par hypothèse. Menons AH perpendiculaire sur Δ et prouvons qu'elle le sera à Δ'. Dans ce but menons par A une perpendiculaire sur AH, soit Δ'' pour fixer les idées. Les droites Δ et Δ'' perpendiculaires à la fois sur AH deviennent parallèles. Donc Δ' et Δ'' sont toutes deux issues de A et parallèles à Δ. Elles coïncident, — d'après le *postulatum d'Euclide* justement — et AH apparaît désormais comme perpendiculaire sur Δ'.

La nature du postulat reste par suite entière.

Cet essai terminé, examinons d'un esprit averti la définition des parallèles, savoir : les droites d'un même plan ne se rencontrant jamais aussi loin qu'on les prolonge. Nous devons avouer que ce mot de « jamais » qui concourt à la définition manque de précision. On imagine bien en effet que deux droites peuvent ne pas se rencontrer si elles restent limitées, mais qu'elles puissent ne se rencontrer jamais si elles deviennent illimitées, voilà ce qui est moins net à concevoir. On nous représentera sans doute que le fait pour deux droites de ne pas se rencontrer, aussi loin qu'on les suppose prolongées, résulte déjà de la notion qu'on se forme de la droite.

Mais, ainsi complétée, cette notion n'est-elle pas alors contradictoire dans sa totalité ? D'un autre côté, n'est-il pas tout aussi légitime, sur l'appui d'une notion qui n'est pas rigoureusement définissable, de supposer plusieurs droites issues d'un point et se rapprochant indéfiniment d'une autre droite sans jamais la

Hosted by Google

rencontrer, à la façon connue dont une courbe plane tend vers son asymptote ?

En résumé, le *postulatum d'Euclide* ne s'impose pas à la spéculation mathématique comme une vérité nécessaire. Il reste seulement possible, non contradictoire, et la non-contradiction, nous le répétons à ce propos, demeure le *critérium* formel de la certitude logique.

La meilleure preuve de cette non-nécessité du postulat des parallèles est l'existence de géométries qui remplacent ce postulat par un autre non équivalent. On les nomme géométries non-euclidiennes et elles développent, tout comme la géométrie classique d'*Euclide*, une chaîne de propositions qui n'impliquent pas de contradiction. Aussi devra-t-on se mettre en garde contre cette opinion qui pèche un peu par ignorance : « Il n'y a jamais eu de sceptiques ni d'hérétiques en géométrie, il n'y a de libres penseurs qu'en religion, en métaphysique et en morale. »

Voici maintenant quelques considérations d'ordre général sur les axiomes et les postulats.

Ces propositions sont à la vérité assez difficiles à différencier entre elles puisque, avons-nous vu, c'est leur caractère de plus ou moins grande évidence qui le permet et que l'évidence manque d'impersonnalité. N'a-t-on pas dit par exemple : axiome des parallèles, pour désigner le *postulatum* euclidien ? Et la confusion qui règne, soit chez les mathématiciens, soit chez les logiciens, pour opérer le classement entre axiomes et postulats, est probante à cet égard.

En philosophie proprement dite le mot axiome semble d'emploi plus fréquent que celui de postulat. Il devient alors à peu près synonyme de principe. Ainsi le témoignent les expressions de *propositions axiomatiques* et d'*axiomes de sens commun* opposées du reste aux axiomes mathématiques ou logiques.

Descartes et *Spinoza* surtout, qui transportaient volontiers en métaphysique, dans l'étude de la connaissance en général, la méthode mathématique, énoncent, ouvertement ou non, un certain nombre d'axiomes métaphysiques.

Hosted by Google

Le premier utilise comme axiome de l'évidence la proposition suivante : Tout ce que nous concevons clairement et distinctement est vrai ; comme axiome de l'existence la proposition suivante : Nous pensons et en tant que nous pensons nous existons, qui fait songer au célèbre *cogito ergo sum*.

Le second utilisera par exemple cette proposition : « L'homme pense », ou celle-ci : « Tout possible existe », ou cette autre : « Un mode de pensée tel que le désir ne peut exister sans l'idée d'une chose désirée ».

De *Kant*, on dira qu'il reconnaissait des axiomes analytiques et des axiomes synthétiques, pour faire allusion à ses jugements analytiques et synthétiques *a priori*, et qui se rapportent au domaine de la raison pure. Dans le domaine de la raison pratique, on dira qu'il admettait des axiomes ou des *postulats de la raison pratique* (*Kant* emploie cette dernière expression), savoir : la liberté, l'immortalité de l'âme, l'existence de Dieu.

Mais *Aristote* avait étendu la signification du mot axiome à toute proposition évidente sans démonstration ou explication, et nécessaire à toute connaissance scientifique.

Or, *Kant* accepte justement en géométrie les axiomes, au sens aristotélicien, comme *imposés a priori* par la raison qui veut prendre connaissance du monde extérieur, et ce caractère apriorique qu'il attribue à l'espace nous rappelle justement son fameux idéalisme transcendantal.

Pourtant l'existence déjà assurée des géométries non-euclidiennes a porté un rude coup à ce caractère nécessaire des fondements de la géométrie. En tout cas le postulat des parallèles, lui, n'est pas nécessaire, au sens kantien du mot, pour édifier quelque géométrie exempte de contradiction, donc possible.

Quant à *Leibniz*, l'admirateur d'*Aristote* savons-nous, il prétend fonder les mathématiques — l'arithmétique et la géométrie, comme il dit, mais une arithmétique et une géométrie où l'infini ne ferait qu'une apparition timide — sur le principe logique d'identité, sans compter les définitions bien entendu. Ce serait ce principe, et ses conséquences immédiates relatives à

Hosted by Google

l'égalité, desquelles nous nous sommes entretenus, qu'il appelle les *axiomes identiques*.

Pour en revenir à l'idée que la délimitation entre axiomes et postulats manque de véritable critère, nous nous garderons d'oublier que *Stuart Mill* soutenait que les propositions axiomatiques ne sont pas éternelles.

Mill n'a pas tout à fait tort, et mérite en cela le titre de psychologue qu'on lui a accordé, eu égard à son empirisme plutôt psychologique.

D'abord le postulatum d'Euclide, combattu de nos jours, en tout cas admis comme simple convention, était reçu pour proposition axiomatique par tous les mathématiciens d'avant l'élaboration des géométries non-euclidiennes.

Ensuite un axiome euclidien et tant de fois examiné en philosophie : « Le tout est plus grand que la partie » est devenu à l'heure actuelle, auprès des mathématiciens, une pure *vérité de définition*. En effet, on dit par définition même, que a est plus grand que b, dès que a est la somme de b et d'un autre nombre positif. Rien n'empêche maintenant, si on le désire, de considérer a comme le tout et b comme une partie de ce tout.

Encore la proposition suivante : « Deux figures géométriques égales à une troisième sont égales entre elles parce qu'elles peuvent coïncider au moment où elles coïncident avec la troisième » sera regardée comme un axiome par le mathématicien objectiviste. Le subjectiviste au contraire, toujours mis en garde contre l'intuition géométrique par son souci de la rigueur mathématique, n'admettra le déplacement sans déformation des figures qui doit amener leur coïncidence que comme un postulat, une hypothèse dirait volontiers M. *Poincaré* dans *la Science et l'Hypothèse*. Au demeurant le subjectiviste fera d'autant moins de différence entre le postulat et l'hypothèse, à propos desquels *Paul Tannery* avait écrit : « Le postulat est en géométrie ce que l'hypothèse est en physique », qu'il va presque jusqu'à envisager la géométrie comme une science physique, la première des sciences physiques.

Quoi qu'il en soit des discussions qui se sont livrées autour

Hosted by Google

des immortels *Eléments*, *Euclide* les commençait par des *définitions*, puis par des *demandes* ou mieux αἰτήματα, puis par des *notions communes* ou mieux χοιναὶ ἔννοιαι. Venaient ensuite naturellement les propositions et leurs démonstrations. Les αἰτήματα sont devenues les *postulata*, en latin, les postulats, en français. Les χοιναὶ ἔννοιαι ont été condensées en un seul mot ἀξιώματα ou *axiomes* par Proclus, le commentateur bien connu, qui non seulement commenta *Euclide* mais aussi *Platon* — entre autres choses il nous a laissé le *Commentaire sur le Timée*, savoir sur un des fameux dialogues platoniciens — et qui fut, lui aussi, philosophe et même chef de l'école néo-platonicienne, au v^e^ siècle après Jésus-Christ.

Par parenthèse, il sera assez piquant de constater un curieux rapprochement entre les débuts des *Éléments* et ceux d'un chapitre accompagnant les *Méditations* proprement dites de *Descartes*, et où ce dernier, en réponse aux objections qu'on lui a faites touchant l'exposé de ses méditations métaphysiques, essaie de donner la preuve de l'existence de Dieu, comme s'il se fut agi d'une théorie géométrique. Le titre du chapitre qui doit fournir soi-disant la preuve en question — la preuve ontologique, comme vous savez — est le suivant, en partie tout au moins : *Rationes Dei existentia probantes... more geometrico dispositæ*, « raisons prouvant l'existence de Dieu... disposées à la manière géométrique ».

On voit, au-dessous, le mot *Definitiones* servant de titre au premier paragraphe. Dans celui-ci *Descartes* cherche en particulier à définir la pensée. Plus bas, on lit le mot *Postulata*, intitulant le deuxième paragraphe. Dans celui-ci il est demandé entre autres choses d'admettre, sans preuve bien entendu, la proposition que nous connaissons sous la dénomination de principe d'identité et de contradiction. Vous vous rappelez comment nous l'énoncions à la suite du philosophe, mais en lui accordant l'épithète moderne d'axiome et non plus de postulat. Vient ensuite le titre du troisième paragraphe : *Axiomata sive Notiones communes*, Axiomes ou Notions communes. Une de ces notions de bon sens sera

Hosted by Google

l'aphorisme suivant : « Il n'y a aucune chose existante de laquelle on ne puisse demander quelle est la cause pourquoi elle existe. »

Suivent enfin plusieurs propositions numérotées et à chaque fois leur démonstration ou mieux leur explication. Nous ajouterons que par ailleurs, dans les *Regulæ*, *Descartes* donne un autre exemple de notion commune, plus proprement axiomatique cette fois ; c'est la proposition bien connue : « Deux choses égales à une troisième sont égales entre elles. »

Mais il est temps d'arrêter cette discussion dans laquelle les logiciens de *Port-Royal* n'auraient pas manqué, j'imagine, de voir une double discussion de mots et de choses. En terminant nous emprunterons à l'*Esprit géométrique* de *Pascal*, comme firent *Arnauld* et *Nicole* sans aucun doute, les règles des axiomes et des postulats (le terme de postulat ne figure pas dans l'écrit en question).

1° « N'omettre aucun des principes nécessaires sans avoir demandé si on l'accorde, quelque clair et évident qu'il puisse être. »

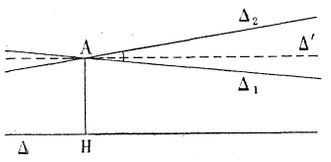
2° « Ne demander en axiomes que des choses parfaitement évidentes d'elles-mêmes. »

Digression historique sur les géométries non-euclidiennes.

Reprenons la figure constituée par une droite Δ et un point extérieur A, ainsi que par AH perpendiculaire sur Δ. Nous disions que si l'on menait par A une perpendiculaire Δ' sur AH, Δ' était parallèle à Δ. Tout autre procédé fournissant une parallèle à Δ, issue de A, redonnerait Δ', et cela, aux termes de la géométrie euclidienne, en vertu du *postulatum d'Euclide* qui conclut à l'univocité, à l'existence unique je veux dire, de la parallèle en question.

Hosted by Google

Mais il n'est pas contradictoire de supposer, en dehors du *postulatum* bien entendu, qu'il existe, issues de A, au moins deux droites Δ_1 et Δ_2 et par suite une infinité, savoir toutes celles qui sont comprises dans leur angle, ne rencontrant pas Δ.



Les droites limites Δ_1 et Δ_2 seront appelées : droites *parallèles* à Δ, et les autres : droites *non-sécantes*. Toute autre droite issue de A, qui n'est ni parallèle ni non-sécante, rencontrera Δ et sera dite *sécante*. L'angle de Δ_1 et de AH s'appelle l'angle de parallélisme. Cet angle devient égal à un droit, quand Δ_1 et Δ_2 se confondent avec Δ', ce qui arrive dans la géométrie classique.

Sans insister davantage, contentons-nous de signaler que dans une pareille géométrie admettant l'existence de deux parallèles issues d'un même point à une même droite, la somme des angles d'un triangle n'est plus égale à deux droits, mais inférieure. En outre l'aire du triangle sera proportionnelle à l'excès de deux droits sur cette somme.

Cela posé venons-en à l'historique de cette géométrie dite non-euclidienne, qu'on appelle aussi géométrie de Lobatschewsky (1) du nom du savant russe qui a su le premier la systématiser.

Le premier en date parmi les géomètres non-euclidiens est le Père Saccheri, jésuite italien du XVIII^e^ siècle, qui distingue entre la parallèle et la non-sécante.

L'Alsacien Lambert, au XVIII^e^ siècle également, (on l'avait surnommé « le *Leibniz* de l'Alsace »), considère l'aire du triangle comme proportionnelle à la différence entre la somme des angles et deux droits.

Le puissant mathématicien allemand **Gauss** (1777-1855), se propose lui aussi d'édifier une géométrie indépendante du postulat traditionnel. Mais il n'en a pas le loisir et il le regrette en ces termes : « Je ne voudrais pas pourtant que tout cela périt

(1) Orthographe la plus accréditée : certains auteurs orthographient différemment.

Hosted by Google

avec moi. » Il signale, par contre, l'opuscule de *Lobatschewsky*, son contemporain, intitulé *Recherches géométriques sur la théorie des lignes parallèles* et écrit au sujet de son auteur qu'il « avait traité la matière en main de maître ».

Quant au géomètre russe, si l'éloge de *Gauss* a contribué au succès de son œuvre, si on a pu le nommer « l'*Euclide* moderne », il est juste de lui reconnaître un sens critique très prononcé. Ses méditations le conduisirent à poser de nouveaux principes de géométrie. « Les premières données, énonce-t-il, seront incontestablement les concepts que nous acquérons dans la nature au moyen de nos sens ; la raison peut et doit les réduire au plus petit nombre possible, pour qu'elles servent ensuite de base solide à la science. »

Un rival de *Lobatschewsky*, quoique moins connu que lui, est le Hongrois Bolyai, qui aperçut à la même époque l'impossibilité de la démonstration du postulat euclidien. Il s'occupa en effet de « la science absolue de l'espace, indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'axiome d'*Euclide* (que l'on ne pourra jamais établir *a priori*) ».

Enfin, vers le milieu du XIX^e^ siècle, le mathématicien allemand Riemann, partant d'une conception curieuse de l'espace qu'il envisage comme « sphérique » dans certaines conditions, rejetant la propriété que par deux points il ne passe qu'une seule droite, imagine une nouvelle géométrie non-euclidienne, où cette fois la somme des angles d'un triangle surpasse deux droits, où par un point il ne passe aucune parallèle à une droite, où par deux points passe une seule droite en général, mais une infinité en particulier.

Tenons-nous en à ces trois géométries euclidienne, lobatschewskienne, riemannienne, parmi toutes les géométries possibles dont l'ensemble constitue la *Pangéométrie*, comme on a dit, et terminons sans autre commentaire par cette opinion de M. *Poincaré* : « Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être *plus commode*. »

Hosted by Google

HUITIÈME LEÇON

DE L'IDÉE DU NOMBRE ENTIER EN MATHÉMATIQUE ET EN PHILOSOPHIE. NOTION DU ZÉRO

Nos leçons sur les premiers principes spéculatifs de la mathématique terminées, il conviendra, sans plus tarder, de nous préoccuper de son objet fondamental, je veux parler du *nombre entier*.

Certes, je vous l'annonçai dès le début de ce cours, nous verrons plus tard les différents prolongements de l'idée du nombre entier, les extensions diverses de cette notion : les nombres dits fractionnaire, irrationnel, négatif, complexe. Pour aujourd'hui, sans traiter pourtant des opérations élémentaires dont s'occupe l'arithmétique, nous essaierons sinon de définir le nombre entier du moins de le caractériser, et nous lui ferons subir un premier traitement relatif à la comparaison des entiers, une fois constitués. La prochaine leçon, nous laisserons son domaine purement mathématique et aussi métaphysique et nous le considérerons sous le double jour critique et historique.

Caractérisation du nombre entier. — L'idée la plus immédiate dans l'ordre de nos connaissances scientifiques et par suite dans l'ordre des connaissances en général, est l'idée de *pluralité*, renfermant en particulier celle d'*unité*. Cette idée s'éveille naturellement dans notre esprit quand nous nous représentons une

Hosted by Google

collection d'objets (matériels bien entendu) et en particulier *un seul objet*, sans tenir compte de la qualité de ces objets.

Si nous nous demandons comment se différencient les unes des autres de pareilles collections, nous songeons précisément à un *nombre entier*, par exemple cinq, huit, etc...

Ainsi à l'origine le nombre entier se présente comme attaché à telle ou telle collection d'objets. Observons qu'il s'agit ici de l'idée abstraite du nombre entier, la seule que nous ayons à examiner par la suite, qui donne lieu à ce qu'on appelle le *nombre abstrait*, sans que la spécification des objets de la collection ait à intervenir. Au reste on nomme *nombre concret*, le nombre entier se rapportant à un groupe d'objets de qualité déterminée. Exemple : cinq hommes, huit chevaux, etc...

Suite naturelle des nombres entiers. — Il importe de savoir maintenant comment s'introduisent dans notre entendement les représentations des différents entiers servant de caractéristique aux diverses collections d'objets, et de voir de quelle façon ces nombres sont *divers* entre eux. Observons, dans ce but, que nous avons nettement la notion, à propos de l'idée de collection d'objets, de l'idée de réunion, ou pour employer le terme consacré, d'*addition* de ces objets.

Ainsi on dira couramment qu'additionner des groupes d'objets, c'est les réunir en un seul nouveau groupe. On remplace souvent du reste le mot objet par celui d'*unité*.

Partons alors de la collection — ici le terme sera un peu impropre — renfermant un seul objet. Nous la caractérisons par le nombre entier *un*. Puis réunissons à cette soi-disant collection un nouvel objet : nous formons une véritable collection cette fois, que nous caractériserons par le nombre entier *deux*. A cette collection additionnons un objet-unité : la nouvelle collection correspondra à un nouvel entier, nommé *trois*. Cette opération se poursuit autant qu'on le désire, et à chaque stade on crée un nom de nombre entier particulier. Du reste, vous savez comment la *numération parlée* apprend à nommer les entiers suc-

Hosted by Google

cessifs. La série de ces nombres poursuivie indéfiniment s'appelle la *suite naturelle des nombres entiers*. Les divers éléments de cette suite sont dits *nombres naturels*.

Dénombrement. —On dit, d'une collection qui correspond au nombre trois, par exemple, qu'elle renferme trois objets. Plus généralement une collection qui correspond à un nombre entier déterminé, quel qu'il soit, sera considérée comme *ayant ce nombre* déterminé d'objets. Sous une autre forme, si l'on demande, dans le premier cas, combien la collection a d'objets, la réponse sera : trois. Dans le cas général, on répondra par le nom de l'entier en question. Cette façon de parler et de répondre suppose qu'on sache *compter* les objets de la collection et répond à ce qu'on appelle le *dénombrement* de la collection. Pour effectuer le dénombrement, on isole d'abord du groupe total un élément, que l'on compte : un, du nom de la collection apparue, puis on réunit à ce premier élément un autre élément pris au groupe total et on compte pour ce nouvel élément : deux, du nom de la nouvelle collection apparue, etc..., on prend enfin le dernier élément du groupe et on compte : huit, pour fixer les idées, du nom de la dernière collection apparue. Mais comme cette dernière collection reproduit en somme le groupe donné, le nom de nombre entier, ici huit, par lequel se termine le dénombrement, est le même que celui qui caractérisait déjà le groupe qu'il s'agissait de dénombrer.

Axiome du nombre entier ou principe d'invariance. — Ce qui précède suppose qu'on est parti d'une collection qui correspondait désormais à un certain nombre entier, qu'on retrouvait forcément, une fois l'opération du dénombrement achevée. Or de même qu'il a fallu, pour cette opération, enlever les éléments successifs dans un certain ordre, de même pour constituer la collection il avait fallu apporter les éléments dans un ordre déterminé, non nécessairement le même que celui du dénombrement. Mais celui-ci revient en somme à constituer à son tour la collec-

Hosted by Google

tion proposée. En d'autres termes, quel que soit l'ordre dans lequel on choisit des éléments pour en former un groupe déterminé, ou, quel que soit l'ordre dans lequel on compte les éléments d'un groupe déjà formé, on aboutit toujours au même nombre entier. C'est cette invariance du résultat, invariance qui découle, au point de vue métaphysique, de la notion de nombre entier et de l'application à cette notion du principe d'identité, lequel permet d'affirmer qu'une collection déterminée d'objets est, sous le rapport de la quantité, toujours identique à elle-même, qu'on a traduite sous le nom de *principe d'invariance* ou *d'axiome du nombre entier*.

Introduction du nombre zéro. — Convenons dans un but de généralisation, non pas tant de considérer une collection par trop singulière ne contenant aucun objet que d'examiner, en distinguant cette fois la qualité des objets, s'il y a ou s'il n'y a pas dans une collection proprement dite quelque objet d'une espèce déterminée. Convenons ensuite de traduire cette absence d'objet, s'il y a lieu, cette idée de privation en quelque sorte, en disant, non pas d'une façon négative, qu'il n'y a pas d'objet de cette espèce dans la collection, mais bien, d'une façon positive, qu'il y a *zéro* objet. Convenons enfin que ce *substitut* de pensée, pour employer un terme de philosophie, jouera un rôle analogue au rôle joué par un nombre entier quelconque, lequel, était lui, plutôt un substitut d'objet concret de pensée, à savoir la collection correspondante, et assimilons zéro à un nombre entier. Il reste bien entendu que ce nombre un peu singulier devra être soumis, à chaque nouvelle *extension* de l'idée de nombre, à chaque nouvelle opération de l'arithmétique, à un traitement spécial qui ne doit apporter par la suite aucune contradiction. Cette idée, dont nous poursuivrons, au moment voulu, les diverses modalités, les diverses représentations si vous préférez, donne lieu à son origine à la notion du *zéro arithmétique*.

Emploi des chiffres. — Vous savez que, dans un but de simplification, on substitue le plus souvent aux dénominations des

Hosted by Google

différents nombres entiers des caractères graphiques, des signes d'écriture. Vous savez également que, bien qu'on ait créé des noms de plus en plus divers pour dénommer les entiers, il suffit, dans le *système décimal* tout au moins, d'un nombre restreint de signes fondamentaux, exactement dix, pour les écrire. Ces signes portent le nom de *chiffres* et sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le premier se rapportant au nombre singulier zéro, le suivant au nombre un, le suivant au nombre deux, etc... L'objet de la *numération écrite* est alors d'apprendre l'usage des chiffres pour écrire un nombre entier quelconque, quand la chose est matériellement possible, cela va de soi.

Notion de l'infini mathématique. — Portons notre attention sur ce fait que l'opération de formation des nombres entiers consécutifs, qui consiste à ajouter une unité à un groupe d'objets déjà formé, peut se répéter indéfiniment. Certes, il ne s'agit pas là d'une opération effective, exigeant une série d'expériences concrètes que nous serions matériellement obligés d'arrêter et même sans avoir formé une collection d'un nombre considérable d'objets, mais seulement d'une opération rationnelle, je veux dire que la raison conçoit comme possible. Eh bien, c'est dans ce fait que réside la notion mathématique de l'*infini* ou, le terme serait plus adéquat, de l'indéfini. L'ensemble des nombres entiers comporte un nombre indéfini d'éléments qui, si on voulait les compter, exigeraient l'emploi des noms de nombres entiers créés au fur et à mesure des besoins, mais dont notre esprit imagine que l'existence demeure possible en dehors de toute nécessité de dénomination verbale ou de représentation écrite. L'ensemble de tous les entiers désormais possibles, le zéro compris ou non, constitue ce qu'on appelle un *ensemble infini*. Le premier qu'étudie l'analyse mathématique est l'ensemble infini des nombres naturels, le zéro exclu. Nous reviendrons bientôt sur la notion d'infini, du reste.

Comparaison des nombres entiers naturels ; égalité et inégalité. — Soient deux collections répondant à deux nombres

Hosted by Google

entiers. Etablissons entre un objet de la première et un objet de la deuxième une correspondance univoque et réciproque, puis entre un autre objet de la première et un autre objet de la deuxième une pareille correspondance, etc., trois cas sont alors possibles. Premièrement, tout objet de la première trouve son correspondant dans la deuxième et *vice versa* par conséquent. Les deux collections ont alors le même nombre d'objets ; le dénombrement qui servirait à l'une servirait en même temps à l'autre. Les deux entiers étaient forcément les mêmes, par exemple 3 et encore 3. On dit qu'ils sont *égaux* et on traduit ce fait par une *égalité* $3 = 3$, où le signe employé s'énonce : *égale* [1] comme vous savez.

Deuxièmement, tout objet de la première a son correspondant dans la deuxième, mais il reste en outre dans celle-ci quelques objets que la correspondance n'atteint pas. Les deux collections ont alors des nombres différents d'objets, le dénombrement qui conviendrait pour l'une ne conviendrait que partiellement pour l'autre et devrait être poursuivi pour cette autre. On dit que le premier entier, 3, par exemple, est *plus petit que* le second, 8, par exemple ; et on traduit ce fait par une inégalité $3 < 8$ (où le signe employé s'énonce : *plus petit que*).

Troisièmement, quelques objets de la première possèdent leur correspondant dans l'autre, mais il en reste sans correspondant. C'est ce qui arriverait si l'on changeait l'ordre des deux collections du cas précédent. On dit alors que l'entier 8 est *plus grand* que 3, et on écrit l'inégalité $8 > 3$, le signe s'énonçant : *plus grand que*. Observons aussitôt qu'il n'y a pas d'autre cas possible et que, lorsque les deux nombres sont différents, il y correspond deux inégalités *équivalentes*, c'est-à-dire traduisant le même fait, avec un simple échange dans l'ordre de comparaison.

Symbolisme littéral des nombres entiers. — Convenons maintenant, dans un but de généralisation et d'opportunité, de

[1] On pourrait dire sans inconvénient : égal à.

Hosted by Google

représenter un entier quelconque, par un symbole graphique différent de celui qui intervient dans la numération écrite. Ce sera, si on veut, une des lettres de l'alphabet, a, b, etc... A l'occasion, pour plus de rapidité, la lettre désignera le groupe d'objets aussi bien que l'entier qui lui est attaché.

Invariance de la comparaison des nombres entiers naturels. — Comparons deux nombres naturels a et b. Un premier cas possible est celui où chaque unité du groupe a correspond à une unité et une seule du groupe b et *vice versa*. Les deux nombres sont égaux et l'on écrit $a = b$, qui est une égalité sous sa forme générale. Un deuxième cas est celui où quelques unités de b n'ont pas de correspondant dans a, quand on a épuisé toutes les unités de a en correspondance avec autant d'unités de b. L'entier a est plus petit que b et on écrit l'inégalité $a < b$. Un dernier cas est celui où c'est dans a qu'il reste cette fois des unités sans correspondance. On doit alors écrire $a > b$.

L'invariance de la comparaison réside justement dans ce fait que si par exemple une première correspondance permet d'établir l'inégalité $a < b$, toute autre correspondance entre les deux mêmes groupes, effectuée bien entendu unité à unité, mais dans un nouvel ordre, ne pourra pas fournir l'égalité $a = b$ ou l'inégalité $a > b$. Ce principe d'invariance analogue au principe d'invariance du nombre entier et qui découlait du principe d'identité, découle à son tour du principe de contradiction (qui complète celui d'identité) envisagé sous le rapport métaphysique de la quantité. Un groupe a qui contient moins d'unités que b, en a toujours moins et ne peut en avoir ni autant, ni davantage. D'ailleurs nous avons dit antérieurement que les trois propositions mathématiques traduites par $a = b$, $a < b$, $a > b$ sont contraires deux à deux et surtout que l'une d'elles admet pour contradictoire l'ensemble des deux autres.

Axiomes de l'égalité des nombres entiers. — Rappelons brièvement, pour l'appliquer aux entiers, ce que nous nommions les propriétés *réflexive*, *symétrique* et *transitive* de l'égalité des

Hosted by Google

nombres en général. La première se rattache à l'égalité $a = a$, qui au fond constitue une véritable tautologie. La deuxième se rapporte à ce que l'égalité $a = b$ entraîne l'égalité $b = a$. L'assertion que lorsque un entier est égal à un autre entier, celui-ci est égal à celui-là, n'est que la traduction du principe d'identité dans la circonstance actuelle. Enfin la troisième correspond à ce que si on a $a = b$ et $b = c$ le principe d'identité permet de conclure $a = c$.

Ordination de l'ensemble des nombres naturels. — Prenons, en excluant jusqu'à nouvel ordre le nombre o, trois entiers, différents deux à deux, a, b, c. Supposons qu'on ait $a < b$ et $b < c$. Comme il manque quelques unités au groupe représenté par a pour que la correspondance, unité à unité, puisse s'établir complètement avec le groupe b, et que dans celui-ci quelques unités font défaut pour assurer la correspondance complète avec le groupe c, il en résulte qu'*a fortiori* on ne pourra pas assurer la correspondance complète entre les groupes a et c, au détriment du dernier. Donc a est plus petit que c.

Les inégalités précédentes entraînent cette nouvelle inégalité : $a < c$. On dit pour tout ensemble d'éléments, tels que trois quelconques d'entre eux satisfont à la fois aux trois inégalités en question, qu'il est *bien ordonné*.

L'ensemble des nombres naturels est bien ordonné et l'on peut écrire successivement $1 < 2 < 3 < 4 < 5 \ldots$

Traitement spécial du nombre o dans la comparaison des entiers. – Généralisons l'étude précédente de comparaison, en traitant à part, comme nous l'avions fait prévoir, le nombre singulier zéro. Tout d'abord, o devra être considéré comme égal à lui-même et on écrira l'égalité conventionnelle $o = o$.

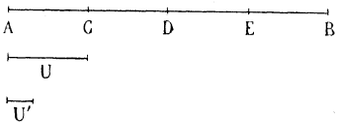
Ensuite, si l'on compare o à un entier quelconque a, on ne trouvera aucun objet à mettre en correspondance avec un objet de la collection relative à a. De telle sorte que o sera regardé comme plus petit que a, d'où l'inégalité $o < a$.

Hosted by Google

Finalement l'ensemble de tous les entiers possibles sera bien ordonné, lui aussi, et l'on aura

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 \ldots$$

Application du nombre entier : première adaptation du nombre à la grandeur mathématique. — Comme je vous avais prévenu que je ferais de temps en temps appel à vos souvenirs de géométrie, adressons-nous au segment de droite.



Soit dès lors un segment AB ; choisissons un segment-type U, qu'on peut appeler segment-unité, et qui servira pour tout autre segment analogue à AB.

Supposons qu'on puisse faire apparaître sur AB des segments AC, CD, DE, EB, ici quatre segments par exemple, tous égaux à U, c'est-à-dire dont la coïncidence avec U soit possible par déplacement. On dira que le nombre de fois que AB renferme un segment égal à l'unité, ici 4, lui sert de *mesure*.

Ainsi le résultat d'une pareille comparaison de segments convenables à un même segment-unité peut être à chaque fois un nombre entier. Désormais, on pourra comparer ces segments entre eux et convenir que deux segments mesurés par les entiers a et b, en général, sont égaux, plus grand ou plus petit l'un que l'autre suivant que a et b sont égaux, plus grand ou plus petit l'un que l'autre. Remarquons alors que le segment en question, considéré comme constitué par la réunion des segments égaux à l'unité, joue absolument le rôle d'une collection d'objets, dont la considération nous a servi à caractériser le nombre entier.

Bien entendu, si AB et U étaient donnés d'avance l'un et l'autre, il se pourrait que AB ne résultât plus de l'addition d'un certain nombre a de segments égaux à U, ne fût pas la *somme*, suivant l'expression courante, de a segments égaux à U.

Mais il peut se faire que AB et U apparaissent ou non comme des sommes respectives de a et de b segments égaux à

Hosted by Google

U', U' étant convenablement choisi. Dans le premier cas vous vous rappelez que la mesure de AB est la fraction $\frac{a}{b}$, dans le second cas où il n'y a pas de segment U', aussi petit soit-il, commune mesure aux segments en question, où ceux-ci sont incommensurables, vous vous rappelez comment on fait intervenir un nombre incommensurable pour servir de mesure. Ajoutons encore que des grandeurs d'espèce déterminée, ici des segments, sont dites géométriques et mieux mathématiques, quand on sait définir, caractériser tout au moins leur *égalité* et leur *addition*. Nous aurons l'occasion de revenir sur cette idée importante qui nous mettra en garde contre l'assimilation trop téméraire de la *grandeur philosophique*, susceptible simplement de « plus » et de « moins », autrement dit de variation (comme le serait une sensation par exemple) avec justement la *grandeur mathématique*.

Hosted by Google

NEUVIÈME LEÇON

(*Suite de la précédente.*)

Critique et histoire du nombre.

Puisque la véritable définition au sens où nous l'avons entendue est impossible pour le nombre entier et qu'on peut seulement le caractériser, vous vous doutez qu'on a dû à maintes reprises proposer de nouvelles pseudo-définitions. Pour vous permettre de bien comprendre ce qui va suivre, il sera commode de distinguer tout de suite ce qu'on entend par la *conception cardinale* et la conception *ordinale* du nombre entier. La première est celle que nous avons envisagée avec l'aide d'une collection d'objets, éveillant l'idée de pluralité et d'unité en même temps, à savoir que les objets sont *plusieurs* dans la collection, et que chacun d'eux y est *un*, ainsi que la collection elle-même qui est *une*. Elle correspond au concept de *quotité* qui — le nom latin *quotus*, combien nombreux, d'où ce terme provient, l'indique suffisamment — signifie que le nombre entier *cardinal* répond à la question : combien de ? Combien y a-t-il d'objets dans ce groupe ? Réponse : quatre, par exemple. Elle correspond pareillement au concept similaire de la *quantité* (cette fois le terme provient de *quantus*, combien grand), qui signifie que le nombre cardinal sert de réponse à la question : combien de fois un segment de droite, par exemple, est-il plus grand que le segment-unité ? Du reste on confond à tort trop souvent, en mathématiques, les termes de grandeur et de quantité, sous prétexte sans doute que le concept de quantité s'adapte à celui de grandeur, sans remarquer qu'une grandeur mathématique ne contient pas forcément toujours un nombre entier de fois la grandeur-unité.

Hosted by Google

La conception ordinale, elle, traduit le concept de *rang*, de *succession*.

Nous avons la perception nette d'une suite d'objets ordonnée où chaque objet, à partir du second tout au moins, vient après un autre. Si alors on a besoin de différencier entre eux les objets de la suite, on pourra leur attacher des symboles divers, qui seront, si on veut, les mêmes que les nombres entiers symbolisant les collections, et regarder ces symboles comme des nombres entiers créés primitivement. De même, nous avons une parfaite conscience d'événements se succédant dans le temps par ordre, par exemple les jours successifs. On pourra les distinguer les uns des autres en leur attribuant une sorte de numéro d'ordre qui se confondra à chaque fois avec un nombre entier.

Observons que la conception cardinale se rapporte à *l'espace*, en ce sens que les collections considérées se trouvent toutes formées dans l'espace, que la notion de segment de droite est une notion spatiale également ; tandis que la conception ordinale se rapporte au *temps*, en ce sens qu'on ne perçoit des objets disposés en série qu'à des instants différents et surtout qu'une succession d'événements implique une certaine durée.

On a discuté la question de savoir si le nombre cardinal aurait précédé, dans l'entendement humain, le nombre ordinal : s'il constituait une notion plus primitive, plus immédiate. En tout cas, il n'y a guère lieu d'être soit « cardinaliste » soit « ordinaliste » car les deux points de vue se rejoignent vite, dès que l'on veut effectuer le dénombrement, le numérotage, à propos d'une collection, en se servant des numéros d'ordre imaginés avec la deuxième conception. A la vérité, cette dernière conception se présente comme plus subjective, plus abstraite que la première, autant que le concept du temps paraît plus pur, moins objectif que celui de l'espace [1].

[1] A la rigueur on pourrait tirer de ce plus grand degré d'abstraction un argument qui militerait en faveur de la thèse de l'antériorité de la conception cardinaliste, puisque dans le développement de l'intelligence humaine ce sont les concepts les plus abstraits qui apparaissent en dernier lieu.

Hosted by Google

Mais la question de l'invariance (qui a donné lieu à ce que nous appelions le principe d'invariance) ne s'y pose pas. En effet, ce qui amenait cette question c'était justement l'application de l'idée d'ordre, de succession, au moment du dénombrement d'une collection unique ou de la comparaison de deux collections. Or cette fois il n'y a plus de collection donnant naissance à plusieurs ordres possibles de numérotage ou de correspondance, mais au contraire un seul ordre de succession possible. Aussi dira-t-on qu'un même numéro affecte toujours le même nombre ordinal ou, si on veut, plusieurs nombres égaux, et que de deux nombres ordinaux l'un est *antérieur* à l'autre et celui-ci *postérieur* à celui-là, ou si l'on préfère que l'un est tantôt *inférieur*, tantôt *supérieur* à l'autre.

En revanche — il est juste de l'ajouter — le nombre cardinal s'adaptera le mieux aux applications.

Si la notion de nombre entier semble de nos jours absolument intuitive, ce serait une erreur de croire qu'il en a été toujours ainsi. Même à notre époque certaines peuplades sauvages ne peuvent compter qu'imparfaitement, en utilisant du reste des procédés empiriques ; leur langage n'userait que des quelques premiers noms de nombre et au delà d'un certain entier ils diraient invariablement « plusieurs ». On a affirmé que récemment encore certains Indiens de la Bolivie, les *Chiquitos*, ne connaissaient pas le nombre 2. Par contre, d'aucuns ont assuré que la cane comptait ses petits et le chien de berger les bêtes de son troupeau ! Quoi qu'il en soit, dans les origines, l'esprit de l'homme a vraisemblablement eu la notion d'unité, puis celle de pluralité ou de multiplicité, mais sans distinguer clairement encore les différents groupes d'objets les uns des autres. En outre, on s'accorde à croire que le nombre 2 a apparu tout seul après le nombre 1, sans être suivi de longtemps d'aucun autre entier. L'homme d'alors aurait en effet pris conscience de son corps en tant qu'objet, puis de ses deux bras ou de ses deux jambes en tant que groupes de deux objets. Au demeurant, la présence, dans les conjugaisons ou déclinaisons de certaines langues, de ce

Hosted by Google

qu'on appelle « le duel » indiquant qu'il s'agit de deux objets soutient cette opinion. En un mot, dans la série des connaissances, ici comme ailleurs, l'esprit humain a passé d'une homogénéité confuse à une hétérogénéité distincte, pour parler comme HERBERT SPENCER lui-même, dont on connaît la loi de philosophie évolutionniste, savoir la loi du passage fatal de *l'homogène à l'hétérogène*, du *simple au complexe*, de *l'indéfini au fini*.

Enfin rappelez-vous le caractère un peu particulier du nombre 1, qui ne correspond pas à une collection proprement dite et, en laissant de côté le nombre singulier o dont la notion ne paraît en aucune façon se rattacher ni à la conception cardinale, ni à la conception ordinale, abordons le développement historique, tant au point de vue mathématique que métaphysique, du nombre naturel ou, comme auraient dit les Grecs du « nombre physique, » φυσικός ἀριθμός. Pour les Grecs du reste, nombre signifiait nombre entier — les extensions diverses sont venues petit à petit — et nous allons employer, sans crainte de confusion possible, ce mot dans ce sens.

Le premier essai de définition systématique du nombre restera sans doute à jamais ignoré. Le roi SALOMON (XI^e^ et X^e^ siècles avant J.-C.) aurait eu apparemment la notion du nombre, autant qu'il ressort de son invocation divine bien connue : « Tu as tout disposé avec nombre, poids et mesure ! » que *Descartes* reprendra plus tard en disant : « Ces vérités suivant lesquelles Dieu même nous a enseigné qu'il avait disposé toutes choses en nombre, poids et mesure ». THALÈS, le plus ancien et le plus illustre des sept Sages de la Grèce (VII^e^ siècle avant J.-C.) aurait emprunté aux Égyptiens la caractérisation du nombre comme étant « un système d'unités ». Chez *Pythagore* et ses disciples, au V^e^ siècle avant Jésus-Christ, la conception cardinale se retrouve : ils se représentaient la droite comme un ensemble discontinu de points, le point étant « l'unité ayant une position», μονὰς ἔχουσα θέσιν.

De même le géomètre **Eudoxe de Cnide**, contemporain de *Platon*, envisage le nombre comme une « pluralité définie », ἀριθμός ἐστι πλῆθος ὡρισμένον.

Hosted by Google

Platon penche plutôt vers la conception ordinale car une pensée qui lui faisait croire que « le ciel a été le grand maître de calcul pour les hommes » doit s'entendre en ce sens que l'homme a dû compter, avant toute chose, les révolutions célestes faisant naître la succession des jours et des nuits.

Après lui, *Aristote* revient au point de vue cardinal et adapte le nombre déjà créé au temps dont l'apparence est le mouvement. Il discute en outre la particularité de l'unité, qui deviendra une « petite pluralité » et, génératrice du nombre, le représentera en puissance.

Enfin, et toujours avant notre ère, *Euclide* donne dans ses *Éléments* sa fameuse caractérisation : ἀριθμός τό ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος « Le nombre est une pluralité composée d'unités ».

Insistons maintenant sur ce qu'on a nommé la *philosophie du nombre*, d'abord à son origine, chez les philosophes grecs. Nous distinguerons à ce propos deux écoles, la pythagoricienne et la platonicienne.

La première, dite aussi de la Grande-Grèce (désignant les colonies grecques de l'Italie méridionale) attribuait une importance exagérée, accordait même une influence mystique au nombre dans son adaptation à la réalité. N'a-t-on pas dit que *Pythagore* avait « appliqué le nombre à la musique et aussi à la métaphysique » ? Une formule caractérisera assez bien ce fétichisme mathématique : « Toute chose est nombre ». Voici comment *Aristote* jugeait les Pythagoriciens, d'ailleurs : « Nourris dans l'étude des mathématiques, ils pensèrent que ses principes étaient les principes de tous les êtres. Les nombres sont de leur nature antérieurs aux choses et ils croyaient apercevoir dans les nombres plutôt que dans le feu, la terre et l'eau, une foule d'analogies avec ce qui est et est produit. Telle combinaison de nombres leur semblait être la justice, ou l'âme, ou l'intelligence, telle autre la musique, etc..., de sorte qu'ils cherchaient dans leur système un ensemble complet. »

La deuxième école, celle de l'Académie, substitue à la *théorie mystique des nombres* de *Pythagore*, la théorie des idées mais

Hosted by Google

encore reliée au nombre, de sorte qu'on a pu la présenter comme une *théorie des Idées-Nombres*. *Platon* distingue deux principes : l'un supérieur, se rapportant au fini, au limité, au « πέρας », l'autre inférieur, l' « ἄπειρον », qui se rapporte à l'indéfini, au non limité. « N'est-il pas vrai, dit *Platon*, que le juste mélange du fini et de l'infini (comprenez l'indéfini) produit la santé ? » Par la pénétration mutuelle de ces deux principes résultent les *nombres sensibles* représentant les choses sensibles et encore imparfaitement déterminées, puis les *nombres ou êtres mathématiques* représentant des choses plus déterminées, susceptibles, à l'image des résultats des opérations arithmétiques, d'accord et d'harmonie. C'est ainsi que dans sa *République* la justice se définira à l'aide de trois vertus : la tempérance, le courage et la prudence. Enfin — cette fois d'une nature hétérogène — non susceptibles de pénétration mutuelle, se mettent à part les *nombres idéaux*, pures essences irréductibles, correspondant véritablement aux idées qui deviennent ainsi dans cette doctrine idéaliste les principes des êtres. L'idée du Bien domine d'ailleurs toute cette théorie.

Ces deux systèmes philosophiques, le *pythagorisme* et le *platonisme*, ont plus ou moins subsisté par la suite, plus ou moins revécu, par exemple à la Renaissance. Quant à l'ère de la « superstition du nombre » qui avait fleuri, dès la plus haute antiquité, elle refleurira au Moyen âge, donnant naissance à l'Astrologie, en particulier. Nous n'insisterons pas sur ce qu'on a nommé les « nombres sacrés [1] » — le nombre sept paraît être, dans la Bible, le nombre par excellence, signifiant souvent un grand nombre — les « nombres fatidiques » etc... Le nombre trois, parce qu'il donne le nombre des dimensions de l'espace — longueur, largeur, hauteur — avait un grand prestige chez les Pythagoriciens. *Aristote*, à leur propos, écrivait : « L'univers et toutes les choses dont il est formé sont déterminés par le nombre trois. A les entendre, la fin, le milieu et le commencement

(1) La loi de *Moïse* ordonnait le repos, le septième jour de la semaine, qu'on appelait le jour du « sabbat ».

Hosted by Google

forment le nombre de l'univers. » La question de savoir si un est ou non un nombre, si l'unité doit être écartée aux termes de la définition euclidienne où le nombre est un agrégat d'unités, va reprendre au Moyen âge, donner lieu à toutes sortes de disputes scolastiques et trouver un dernier écho jusque dans le XVII^e^ et même le XVIII^e^ siècles ! Déjà le mathématicien arabe MOHAMMED AL KHÂRIZMÎ, du IX^e^ siècle, dont l'*Arithmétique* ou l'*Art de calculer* ou mieux sa traduction a eu un grand retentissement dans l'Occident latin, trois siècles plus tard, mettait l'unité à part, à l'exemple à peu près constant des Grecs.

Pascal, le penseur à la vaste intelligence, a vu juste lorsqu'il a écrit : « Il faut savoir que la seule raison pour laquelle l'unité n'est pas au rang des nombres est qu'*Euclide* et les premiers auteurs qui ont traité l'arithmétique, ayant plusieurs propriétés à donner qui convenaient à tous les nombres hormis à l'unité, pour éviter de dire souvent qu'en tout nombre, hors l'unité, telle condition se rencontre, ils ont exclu l'unité de la signification du nombre, par la liberté que nous avons déjà dit qu'on a de faire à son gré des définitions. » Or, justement, dans l'enseignement présent des mathématiques, bien qu'on regarde 1 et même 0 comme des nombres, doit-on, à chaque opération nouvelle sur les nombres, envisager à part le premier et surtout inévitablement le second.

La *Logique de Port-Royal*, elle, nous permet de lire à peu près ceci : « Ayant défini le nombre : cela par quoi s'explique la quantité de chaque chose, il se met ensuite fort en colère contre ceux qui ne veulent pas que l'unité soit nombre. Mais cette définition est arbitraire comme celle d'*Euclide* : un nombre est une multitude d'unités assemblées, et où il est visible que l'unité n'est pas nombre. »

Leibniz, à un tout autre point de vue, accordait une attention spéciale à l'unité et au zéro. Imaginant par fétichisme mathématique ou mieux cette fois théologique que Dieu pouvait être représenté par l'unité et le néant par zéro, il proposa le système de numération binaire où les nombres seraient représentables par les

Hosted by Google

deux caractères 0 et 1 tout comme dans le système habituel ils le sont avec les dix chiffres arabes.

Buffon, dont vous connaissez l'*Histoire naturelle*, peut-être davantage le *Discours sur le style*, et qui, ayant pris goût de bonne heure aux mathématiques, produisit un *Essai d'arithmétique morale* moins connu, refusait énergiquement à l'unité la qualité de nombre. Il vantait à son tour les avantages scientifiques, cette fois-ci, du système de numération duodécimale ou « duodénaire », selon son expression.

Quant à *Newton*, il envisageait le nombre comme le *rapport* d'une grandeur avec la grandeur unité, c'est-à-dire la manière dont une grandeur est composée avec l'unité. Mais naturellement il faut comprendre que l'idée du nombre a pris déjà ses extensions arithmétiques tout au moins. Nous étudierons en son temps la notion de rapport mathématique.

Insistons maintenant sur le concept de nombre relié au problème général de la connaissance.

Descartes, voulant rechercher dans ses *Regulæ* de quelle façon les objets de pensée s'enchaînent les uns les autres, en arrive à considérer entre autres choses l'unité comme un élément simple, un objet « absolu » de pensée, et le multiple ou le nombre comme un composé, un objet « relatif » de pensée.

Pour *Locke*, qui définit l'idée tout ce qui est objet immédiat de l'entendement, il y a deux sortes d'idées : les idées « simples » et les idées « complexes ». Les unes, l'esprit les reçoit passivement, surtout par l'intermédiaire de la sensation : exemple, l'idée d'unité. Les autres, l'esprit les forme par son action propre à l'aide des premières comme matériaux : elles se divisent en particulier en idées de « modes » et précisément le nombre sera un « mode de l'unité ».

Leibniz soutient contre *Locke* la théorie des idées innées. C'est là le principal objet des *Nouveaux Essais* et vous connaissez sa curieuse formule idéaliste : « Rien n'est dans l'entendement qui n'a été primitivement dans les sens, si ce n'est l'entendement lui-même : *nihil est in intellectu quod non fuerit in sensu nisi ipse*

Hosted by Google

intellectus. » Aussi admettra-t-il sans hésitation cette idée complexe du nombre, si idée complexe il y a.

Il soutient même, en digne spiritualiste, que l'on peut compter des objets immatériels. Enfin dans sa *Monadologie* il étudie métaphysiquement les « éléments » des choses ou « monades » : ce mot venant du grec μονὰς, unité, a déjà été employé par les géomètres hellènes dans un sens mathématique, puis plus tard, dans le sens théologique, comme désignant Dieu, par les néoplatoniciens du commencement de notre ère.

Kant, au long de son analyse critique des concepts de la raison pure, accorde une place prépondérante à l'idée de nombre. Il voit dans le nombre « le schème de la quantité », un schème étant une figure qui sert d'intermédiaire entre l'entendement pur et les phénomènes qui lui sont soumis.

Pour *Stuart Mill*, l'empiriste exagéré, le fait énoncé dans la définition d'un nombre est pour ainsi parler un fait physique. Sa conception est essentiellement cardinaliste.

La conception ordinaliste au contraire, nous la retrouvons, nous la trouvons veux-je dire, systématisée et développée, chez le physiologiste allemand Helmholtz, un des grands savants du siècle dernier. Ce puissant logicien a même tenté de démontrer l'axiome du nombre, le principe d'invariance, quand il s'agit de dénombrer ordinalement une collection d'objets et d'arriver toujours au même numéro quel que soit l'ordre du dénombrement. La démonstration à proprement parler reste incomplète car elle postule, malgré tout, que l'invariance n'est pas altérée si l'on échange l'ordre de deux objets consécutifs, au moment du numérotage. Alors évidemment, si cela est admis, on pourra passer d'un premier ordre de dénombrement à un deuxième ordre déterminé, par une série d'échanges successifs de deux objets consécutifs à chaque fois. Par exemple, si l'objet relatif au premier dénombrement qui correspond au premier objet dans le second dénombrement occupe la quatrième place, on l'amènera à occuper la première place par trois échanges successifs avec l'objet précédant immédiatement à chaque fois. Puis

Hosted by Google

on amènera en deuxième place l'objet du premier dénombrement correspondant au deuxième objet considéré dans le second dénombrement. Ainsi de suite et comme chaque opération intermédiaire n'altère pas l'invariance, celle-ci existera bien indépendamment de l'ordre de numérotage : on arrivera en fin de compte toujours au même numéro.

Nous en aurons fini avec l'histoire du nombre entier quand nous aurons fait connaître la *définition par postulats* de *Peano*, relativement récente. Ce logisticien (admettant sans aucun doute comme idée primitive celle du nombre entier et même celle du zéro) postule un certain nombre de propriétés, indépendantes et non contradictoires bien entendu, dont l'ensemble constitue la caractérisation complète du nombre entier, et qui devront par la suite se trouver réunies quand on étudiera les opérations arithmétiques. Voici les plus saillants de ces postulats : zéro est un nombre ; zéro ne suit aucun nombre ; deux nombres sont égaux s'ils sont suivis du même nombre. Quant à la succession des nombres, elle est assurée par le principe d'induction complète — première manière — qui certifiera dans la circonstance que si on sait former un nombre $n+1$, à partir d'un nombre n, et si on sait former un nombre particulier, o par exemple, on saura former un nombre entier quelconque.

Enfin, plus récemment encore, la psychologie s'est emparée de l'idée numérale et on a pu par exemple en s'adressant primitivement à la suite des mots, des paroles d'une même langue, y adapter la suite des nombres, ce qui nous ramène, à la vérité, à la conception ordinale du nombre.

Hosted by Google

DIXIÈME LEÇON

DE L'INFINI EN MATHÉMATIQUE ET EN PHILOSOPHIE

Nous ne pouvons passer sous silence dans nos généralités la notion de l'infini que nous avons effleurée de temps à autre, d'autant plus que s'il est un concept mathématique qui rejoigne la notion métaphysique de même nom et donne lieu à des critiques tenaces, c'est bien celui de l'infini.

Nous commencerons en restant purement dans le domaine de la Mathématique.

Il s'y présente d'ailleurs tout aussitôt — a-t-on vu — dès qu'on a caractérisé le nombre entier et qu'on s'occupe de la formation des entiers consécutifs. L'esprit peut toujours concevoir en effet qu'après un nombre entier constitué, il est possible d'en constituer un autre. « Qu'y a-t-il de plus évident, disait *Pascal*, qu'un nombre, tel qu'il soit, peut être augmenté ? ». C'est là le véritable sens de l'infini mathématique, le sens actuel en tout cas. On dira donc, non pas qu'un entier est infini, mais que la suite des nombres entiers est *indéfinie* ou, comme l'usage le veut encore, *infinie*.

De même quand on symbolise des segments de droite que la pensée concevra comme indéfiniment grands, par un entier ou une fraction ou un nombre irrationnel, un pareil nombre, soit x, ne sera pas dit infini, mais indéfiniment grand ou, toujours d'après l'usage, *infiniment grand*.

De plus, en imaginant un nombre fixe A, aussi grand soit-il, on pourra constamment penser qu'un nombre entier n est plus

Hosted by Google

grand que lui, donc il est toujours possible de satisfaire à l'inégalité $n > A$. A plus forte raison le nombre quelconque x pourra-t-il dépasser A et satisfaire à l'inégalité

$$x > A.$$

Remarquons que x désigne un nombre positif nécessairement.

En outre, dans le *calcul infinitésimal*, on entend toujours par « infiniment grand » un pareil nombre x dont la condition formelle, explicitée ou sous-entendue, est d'être *variable*.

D'une façon analogue, on entendra par nombre *infiniment petit*, un nombre positif, soit y, variable par essence et qui finit par devenir plus petit qu'un nombre positif fixe, ε, aussi petit qu'on veut. Par suite y finira-t-il par vérifier l'inégalité

$$y < \varepsilon.$$

Au demeurant, comme l'inégalité $x > A$ entraîne l'inégalité $\frac{1}{x} < \frac{1}{A}$, et comme $\frac{1}{A}$ est aussi petit qu'on veut dès que A est aussi grand qu'on veut et peut alors jouer le rôle de ε, le nombre $\frac{1}{x}$ à son tour peut jouer le rôle de y. On en conclut que l'*inverse* d'un « infiniment grand » est un « infiniment petit », et réciproquement d'ailleurs.

Enfin puisque l'occasion se présente (nous reviendrons plus tard sur ces diverses notions bien entendu), indiquons ce qu'on doit comprendre rigoureusement sous le nom de *limite*.

On dit qu'un nombre essentiellement variable positif ou négatif, soit z, admet une limite bien déterminée a, quand la différence entre z et a est un infiniment petit, en valeur absolue toutefois.

Si z reste sans cesse inférieur à a, on finit par avoir

$$a - z < \varepsilon.$$

Si z reste sans cesse supérieur, on finit par avoir

$$z - a < \varepsilon.$$

Hosted by Google

Si z est tantôt inférieur tantôt supérieur, on finit par avoir, en employant la notation connue de la valeur absolue,

$$| z - a | < \varepsilon.$$

En particulier si z est positif et s'il arrive que la limite est o, l'inégalité convenable devient

$$z < \varepsilon,$$

et nous retombons sur la définition de l'infiniment petit. Ainsi un infiniment petit est un nombre positif qui a pour limite zéro.

Mais cette dernière interprétation ne se retrouve pas à propos de l'infiniment grand ; on ne saurait trouver de nombre fixe, bien déterminé, qui en soit la limite. Aussi dit-on souvent que l'infiniment grand est un nombre qui croît sans limite.

Si quelquefois on écrit $n = \infty$ ou $x = \infty$ (ce symbole graphique de l'infini mathématique vous étant bien connu), c'est par convention, peut-être abusive, et dans le but d'abréger le discours ainsi que l'écriture. On évite en effet de dire et d'écrire dans ces conditions que l'on a $n > A$ ou $x > A$, quelque grand que soit A.

A la vérité dans ces questions d'infini, de limite, si l'on veut rester rigoureux, c'est aux inégalités précises de définition qu'il faut s'en référer. Cette idée, un algébriste achevé la rendrait en disant qu'on a *réduit l'infini en formules*.

Mais, objecterez-vous, en songeant au caractère de l'infiniment grand et de l'infiniment petit d'être des nombres inverses, pourquoi, puisqu'on considère la limite particulière o pour le second, ne pas considérer la limite inverse pour le premier ? D'autant mieux que vous vous souvenez sans doute d'une proposition, aux termes de laquelle si un nombre variable admet une limite, a, son inverse admet à son tour une limite, à savoir $\frac{1}{a}$? Eh bien, c'est parce que d'une part on n'a jamais à considérer l'inverse de o comme un nombre possible, donc comme une limite bien déterminée et que, d'autre part, le théorème en question souffre une exception dans le cas où a est justement égal à o.

Hosted by Google

Laissons pour l'instant ces considérations critiques et, en vue d'une ou deux applications importantes, donnons plutôt quelques détails techniques sur ce chapitre de l'infini.

Montrons d'abord que les puissances successives d'un nombre, soit q, plus grand que 1, croissent non seulement constamment, ce qui est par trop simple, mais indéfiniment en même temps que l'exposant n de la puissance. Autrement dit, justifions que q^n est un infiniment grand dès que n le devient.

Il suffit de prouver qu'on pourra choisir l'entier n de façon à satisfaire à l'inégalité

$$q^n > A, \tag{1}$$

où A est un nombre pris à l'avance, aussi grand qu'on veut.

En effet, d'après l'hypothèse que q surpasse 1, on peut écrire $q = 1 + \alpha$, α étant positif. L'inégalité (1) s'écrit dès lors

$$(1 + \alpha)^n > A. \tag{2}$$

Mais nous avons démontré antérieurement, en usant du procédé par récurrence, que l'on a

$$(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha.$$

L'inégalité (2) aura par suite lieu, et *a fortiori*, si l'on prend

$$1 + n\alpha > A$$

ou finalement

$$n > \frac{A - 1}{\alpha},$$

ce qui est possible, puisque n croît sans limite.

Montrons ensuite que les puissances successives d'un nombre positif, soit q', inférieur à 1, décroissent constamment et indéfiniment lorsque l'exposant de la puissance est un infiniment grand, en d'autres termes que q'^n est un infiniment petit.

Cela résulte de ce que, en posant $q' = \frac{1}{q}$, où q est supérieur à 1 puisque son inverse q' est inférieur, on aura $q'^n = \frac{1}{q^n}$.

Et comme q^n est un infiniment grand avec n, son inverse q'^n sera bien un infiniment petit.

Hosted by Google

Cela posé, étudions la somme des n premiers termes

$$a, \quad aq, \quad aq^2, \quad \ldots \quad aq^{n-1}$$

d'une *progression géométrique décroissante*, c'est-à-dire où le premier terme a est positif et la raison q positive et de plus inférieure à 1.

Écrivons $\quad S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$

ou $\quad S_n = a(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}).$

Or si l'on forme le produit suivant :

$$(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})(1 - q),$$

on trouve, les produits partiels disparaissant deux à deux, sauf les deux produits des termes extrêmes, que l'on a

$$(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})(1 - q) = 1 - q^n.$$

On en déduit $\quad 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \dfrac{1 - q^n}{1 - q}.$

Par suite $\quad S_n = a\,\dfrac{1 - q^n}{1 - q} = \dfrac{a}{1 - q} - a\,\dfrac{q^n}{1 - q}.$

Finalement on aura

$$\frac{a}{1 - q} - S_n = a\,\frac{q^n}{1 - q}. \tag{3}$$

Mais il est facile de prouver que $a\,\dfrac{q^n}{1 - q}$ est un infiniment petit, quand n devient un infiniment grand, autrement dit qu'on finit par avoir

$$a\,\frac{q^n}{1 - q} < \varepsilon,$$

où ε, positif, est aussi petit qu'on veut.

En effet cette inégalité est finalement équivalente à la suivante :

$$q^n < \frac{\varepsilon(1 - q)}{a},$$

et celle-ci finira par être satisfaite, puisque q^n est précisément ici un infiniment petit.

En résumé, l'égalité (3) assure désormais que la somme variable S_n, croissante constamment bien entendu, ne croît pas indé-

Hosted by Google

finiment mais possède au contraire une limite bien déterminée

$$\frac{a}{1-q}.$$

Ce résultat est condensé dans l'égalité symbolique qui suit :

$$\lim S_n = \frac{a}{1-q}$$

(lim s'énonçant limite de).

Comme application considérons la progression, ou si on veut, la *série*

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}, \cdots$$

dont chaque terme s'obtient du précédent en multipliant par le nombre $\frac{1}{2}$, qui sert de raison.

On peut écrire

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Ainsi un premier résultat précis, à propos de l'infini mathématique, c'est que la *somme* des termes d'une *série infinie*, à savoir dont le nombre des termes est infiniment grand, peut être finie.

On dit alors que la série est *convergente*, que S_n converge vers une limite qui est précisément cette somme de la série infinie dont nous venons de parler.

Dans ce cas le $n^{\text{ème}}$ terme de la série, ou le *terme général* comme on le nomme, est un infiniment petit dès que son rang n devient infiniment grand : il tend vers o comme limite.

Au contraire pour la série constituée par une progression géométrique croissante — où $q > 1$ cette fois — dont le nombre des termes est infiniment grand, le terme général aq^{n-1} croît sans limite et *a fortiori* la somme S_n. Cette série est dite alors *divergente*.

Enfin, envisageons une proposition de la théorie des limites énonçant que si deux nombres variables x et y ont des limites respectives a et b, leur quotient $\frac{x}{y}$ admet également une

Hosted by Google

limite $\frac{a}{b}$, en supposant toutefois que b est différent de 0.

Ce théorème, dans le cas particulier où x se réduirait à une constante égale à 1, fournit justement la proposition rencontrée ci-dessus sur l'inverse d'un nombre variable et de sa limite.

Nous démontrerons la proposition en général en supposant, pour fixer les idées, que l'on a sans cesse $x < a$ et $y > b$ (les autres hypothèses se traitant d'une façon analogue).

Dans ces conditions on a *a fortiori* $\frac{x}{y} < \frac{a}{b}$.

Je dis qu'on finira par avoir maintenant

$$\frac{a}{b} - \frac{x}{y} < \varepsilon, \tag{1}$$

ε étant aussi petit qu'on veut et positif.

Représentons en effet les différences $a - x$ et $y - b$ qui sont deux infiniment petits par x' et y', nombres positifs. En de nouveaux termes, posons

$$a - x = x' \quad \text{et} \quad y - b = y',$$

d'où on tire $x = a - x'$ et $y = b + y'$.

Par suite on aura

$$\frac{a}{b} - \frac{x}{y} = \frac{a}{b} - \frac{a - x'}{b + y'} = \frac{a(b + y') - b(a - x')}{b(b + y')} = \frac{ay' + bx'}{b(b + y')}.$$

Mais il est manifeste que cette dernière expression est inférieure à $\frac{ay' + bx'}{b^2}$, ou que l'on a

$$\frac{ay' + bx'}{b(b + y')} < \frac{ay' + bx'}{b^2}.$$

Donc l'inégalité (1) aura lieu, et cela *a fortiori*, si on finit par avoir la suivante :

$$\frac{ay' + bx'}{b^2} < \varepsilon. \tag{2}$$

Pour que celle-ci ait lieu il suffit qu'on ait à la fois

$$\frac{ay'}{b^2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \frac{bx'}{b^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Hosted by Google

ou alors $y' < \frac{b^2\varepsilon}{2a}$ et $x' < \frac{b\varepsilon}{2}$,

ce qui finit par arriver puisque x' et y' sont des infiniment petits. C. Q. F. D.

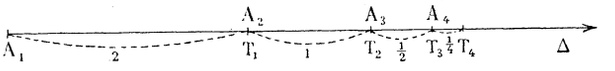
On a pu remarquer que l'hypothèse: b différent de 0, intervenait dès le début de la démonstration, quand on a formé le quotient $\frac{a}{b}$ qui n'avait de sens qu'à cette condition.

Maintenant que nous sommes forts des résultats précédents, nous aborderons sans trop de crainte certaines questions qui ont cours à propos de la compréhension métaphysique de l'infini.

Voici d'abord l'un des fameux sophismes de Zénon d'Elée, le dialecticien grec, chef de l'école dite des *Eléates*, qui aurait soutenu, au v^e^ siècle avant Jésus-Christ, la conception de la divisibilité à l'infini de la matière, en digne adversaire de l'*atomisme* qui suppose un dernier élément matériel insécable, pour chaque corps.

C'est l'argument d'Achille et de la tortue. Il consiste à soutenir qu'Achille ne pourra jamais rattraper la tortue, si elle a sur lui une certaine avance, car d'abord il devra rattraper la moitié du chemin, puis la moitié du chemin restant, indéfiniment.

Pour lui donner une forme plus moderne considérons deux mobiles A et T parcourant une droite Δ, dans le sens de la



flèche, chacun d'un mouvement uniforme, la vitesse du premier étant double de celle du second, et partant des positions respectives A_1 et T_1 où leur distance A_1T_1 égale 2 unités de longueur. Nous supposons en outre que les vitesses sont égales à 2 et à 1, c'est-à-dire que les chemins parcourus dans l'unité de temps sont respectivement égaux à 2 unités de longueur et à 1 unité.

Au bout du temps 1, le mobile A est venu de A_1 en A_2 qui

Hosted by Google

coïncide avec T_1, et le mobile T est venu de T_1 en T_2, tel que $T_1T_2 = 1$. La distance A_2T_2 est réduite de moitié.

Au bout d'un nouveau temps égal à $\frac{1}{2}$ cette fois, ou d'un temps total égal à $1 + \frac{1}{2}$, le mobile A est venu en A_3 qui coïncide avec T_2 et le mobile T est venu en T_3, tel que $T_2T_3 = \frac{1}{2}$. La distance A_3T_3 est encore réduite de moitié : elle est devenue le quart de la première. Et ainsi de suite. On voit alors que le second mobile T parcourt un segment égal à

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

dans le temps égal à

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

tandis que le premier A parcourt en plus le segment initial égal à 2 et en moins le segment final égal à $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Doit-on maintenant en conclure que A ne rattrapera jamais T, sous prétexte que si faible que soit leur distance, qui devient à un moment donné égale à $\frac{1}{2^{n-1}}$, il faut encore la réduire de moitié et cela indéfiniment avant de la supposer nulle ?

Pas le moins du monde ! Le vice de l'argumentation réside dans la mauvaise compréhension du mot *jamais* qui intervient dans son affirmation.

Rappelons-nous en effet que la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

est convergente, que sa somme, en tant que limite de la somme de ses n premiers termes lorsque n a cru indéfiniment, est égale à 2, et nous en inférons que le mot « jamais » signifie que la rencontre ne se fera « jamais avant qu'il ne se soit écoulé un temps égal à 2 » ; mais non pas qu'elle ne se fera « jamais dans le emps », au bout d'une durée indéfiniment grande. On aurait

Hosted by Google

seulement le droit de soutenir que la rencontre n'aurait jamais lieu, d'une façon absolue, s'il fallait toujours le même intervalle de temps, égal à 1 par exemple, pour que la distance se réduisît de moitié à chaque fois, pour qu'elle devînt $\frac{1}{2^{n-1}}$, au bout du temps, non pas

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

mais au bout du temps

$$1 + 1 + 1 + \cdots + 1 \quad \text{à savoir } n.$$

Dans l'espèce, le chemin parcouru par le mobile T et le temps correspondant sont deux variables qui prennent les mêmes valeurs numériques, qui ont par suite même limite, en un mot tout à fait comparables.

Quant à la question de savoir si ces variables atteignent effectivement leur limite, elle est plus embarrassante, et cette fois les réponses vont différer selon que répondront les mathématiciens subjectiviste et objectiviste.

Le premier, qui ne s'inquiète pas de savoir si une variable, par exemple $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$, atteint ou n'atteint pas sa limite, qui traduit la notion de limite par une inégalité, ici $2 - S_n < \varepsilon$, et non par une égalité, ici $\lim S_n = 2$, ne saura répondre par l'affirmative. Il dira simplement que la rencontre ne s'effectuera pas en deçà d'un certain point distant de T_1 de 2 unités de longueur, lequel correspondrait à la limite du chemin parcouru par le mobile T, et avant qu'il ne se soit écoulé un temps égal à 2 unités de temps, lequel correspondrait à la limite du temps employé. Au reste, notre subjectiviste n'aura pas à s'inquiéter de telle ou telle application concrète, puisqu'il écarte dans ses spéculations rigoureuses jusqu'à la considération des grandeurs pour n'envisager que le nombre pur.

Le second, qui volontiers pense en images, sera moins gêné par cette crainte de réaliser l'infini et, de même qu'il envisage un nombre incommensurable comme la limite effective d'un nombre

Hosted by Google

commensurable variable, de même il répondra que la rencontre a lieu en vérité, qu'au bout de 2 unités de temps le mobile A qui parcourt 4 unités de longueur aura rattrapé le mobile T qui n'en parcourt que 2 et qui possédait l'avance des 2 autres. D'ailleurs, notre objectiviste qui ne se soucie guère sans doute de réaliser le nombre entier infini pour servir de mesure à une grandeur qui serait réellement infinie, parce que les applications ne lui imposent pas de pareille grandeur, sera plus résolu à affirmer que l'entier n atteint l'infini, à propos par exemple de

$$\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2,$$

qui mesurait cette fois-ci une grandeur finie intervenant dans une application de mécanique, de géométrie tout au moins. Cette différence d'appréciation du même mathématicien, selon les cas, et qui semble paradoxale, n'est pas gratuite de notre part ; nous la constaterons déjà chez *Aristote*, dans notre prochaine leçon.

Quoi qu'il en soit pour le moment de cette contradiction, c'est la réponse de l'objectiviste qui manque de véritable rigueur. Empressons-nous d'ajouter pour sa défense, que nous nous trouvons là en présence d'une difficulté, peut-être à jamais insurmontable, en tout cas qui dure depuis de longs siècles, et touchant l'adaptation de l'infini mathématique au monde des phénomènes intuitifs. En effet, en imaginant un segment de longueur 2, il semble bien qu'il doive apparaître comme constitué, non pas par la somme indéfinie de sa moitié, de son quart, de son huitième, etc... indéfiniment, mais bien plutôt par la somme en tant que limite réalisée de sa moitié, de son quart, de son huitième, etc... infiniment cette fois. Tantôt il s'agissait de la divisibilité indéfinie du segment en segments de plus en plus petits, tantôt de sa divisibilité avec un terme extrême effectif. L'antinomie, le paradoxe si on préfère, consiste en ce fait que la divisibilité se conçoit sans limite possible mais en revanche que le segment n'apparaît jamais alors comme la somme de toutes ses parties possibles.

Du reste *Pascal* avait vu juste, comme à l'ordinaire, dans la question que soulève le sophisme de *Zénon d'Elée*, quand il écri-

Hosted by Google

vait ceci : « Pour soulager ceux qui auraient quelque peine à concevoir qu'un espace (limité) ait une infinité de *divisibles* (entendez : de parties), vu qu'on les parcourt en si peu de temps, il faut les avertir qu'ils ne doivent pas comparer des choses aussi disproportionnées qu'est l'infinité des divisibles avec le peu de temps où ils sont parcourus ; mais qu'ils comparent l'espace entier avec le temps entier et les parties divisibles à l'infini de l'espace avec les parties divisibles de ce temps ; et ainsi ils trouveront qu'on parcourt un petit espace en un petit temps. »

Ce conseil est depuis longtemps suivi dans le *calcul des infiniment petits*.

La difficulté signalée sinon résolue, poursuivons notre étude déjà critique de l'infini mathématique, mais en revenant au domaine des nombres purs dans lequel nous serons davantage à l'aise. Je veux vous en citer un fait ou deux qui ne laisseront pas de vous étonner sans doute.

Vous savez d'abord que la somme d'un nombre limité de termes est commutative, que, pour prendre l'exemple antérieur de la somme des carrés des n premiers nombres entiers, cette somme est $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, quel que soit l'ordre de ses termes. Eh bien, la commutativité n'existe plus nécessairement quand on envisage une suite infinie de nombres. Il y a, en effet, des séries, dites *semi-convergentes*, et dont il suffit de changer l'ordre des termes pour que leur somme change, et même pour devenir divergentes.

Ainsi on démontre (peut-être le ferons-nous plus tard [1]) que la série suivante :

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdots$$

est convergente, mais qu'en l'écrivant de la sorte

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdots,$$

(1) Voir note finale n° 1, dans la deuxième partie.

Hosted by Google

en prenant alternativement deux termes positifs et un terme négatif dans l'ordre où on les rencontre successivement, on la rend divergente.

Cette particularité explique incidemment pourquoi, dans un ensemble de termes en nombre infini, l'ordre a une grande influence ; pourquoi un pareil *ensemble infini*, comme on a dit déjà, doit-il être considéré comme bien ordonné. Et ceci nous amène à signaler brièvement une théorie encore en voie de formation, celle des ensembles, sous-entendu infinis, le plus souvent, et qui est due essentiellement à M. Georg Cantor, qu'il ne faudra pas confondre avec l'historien des mathématiques dont je vous ai parlé. Il est assez curieux de connaître que dans cette théorie la définition, la notion de l'infini tout au moins ne possède plus son sens ordinaire. On dira, par définition ou caractérisation même, qu'un ensemble infini est tout ensemble *équivalent à l'une de ses parties*, en de nouveaux termes : qu'on peut établir une correspondance *uniforme et réciproque* entre les éléments un à un de l'ensemble total et de l'ensemble partiel considéré.

Prenons, pour préciser, l'ensemble des entiers consécutifs

$$1, 2, 3, \ldots \qquad \ldots \qquad n, n+1, \ldots$$

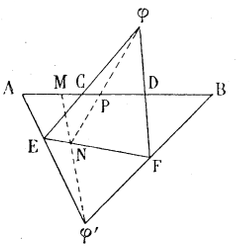
Écartons les deux premiers éléments de façon à constituer le nouvel ensemble partiel

$$3, 4, 5, \ldots \qquad \ldots \qquad (n+2), (n+3), \ldots$$

Il existera bien une correspondance uniforme et réciproque entre les deux premiers éléments des deux ensembles, 1 et 3, puis entre les deux seconds, 2 et 4, puis entre les deux troisièmes, 3 et 5, etc... puis entre les deux $n^{\text{èmes}}$, n et $n+2$, et cela indéfiniment. De même, pour prendre un exemple géométrique, l'ensemble des points du segment AB sera un ensemble infini, puisque équivalent à l'ensemble des points du segment CD qui en est une partie. On s'en rend compte aisément en utilisant un segment auxiliaire EF et les points fixes φ' et φ obtenus comme indique la figure. A tout point M de AB correspond le seul point P de CD, par l'intermédiaire de N, et *vice versa*.

Hosted by Google

Au contraire l'ensemble fini possède une définition négative (observez en passant que c'est le nombre entier infini qui dans l'étude des mathématiques classiques reçoit la définition négative que vous savez). On dira que c'est un ensemble non équivalent à quelqu'une de ses parties. Pour préciser, si nous prenons les deux ensembles finis :



$$1, 2, 3, \ldots . n \qquad \text{et} \qquad 3, 4, 5, \ldots . n,$$

où pour former le second on a également supprimé les deux premiers éléments du premier, la correspondance envisagée ci-dessus ne pourra plus s'établir, puisque, de quelque façon qu'on s'y prenne, il manquera pour assurer la correspondance deux éléments au second.

Enfin voici un fait plus singulier encore.

Jusqu'à présent il n'était pas question de la nature elle-même de la correspondance, de la *loi de formation* des ensembles l'un par rapport à l'autre. Il est clair que s'il s'agit de deux ensembles finis il suffira pour définir la loi de formation des termes chacun à chacun de se donner un nombre fini de mots. La formule algébrique qui y suffirait comporterait un nombre fini de symboles, lettres ou signes. Mais pour les ensembles infinis il n'en va pas toujours ainsi.

Certes, dans les cas simples la correspondance sera spécifiée en quelques mots. Pour nos deux ensembles précédents, il suffirait de dire que, étant fourni le premier, chaque élément du second s'en déduira en ajoutant l'entier 2 à l'élément correspondant. Mais serait-il nécessaire de changer à chaque nouvel élément en formation dans le second le mode dont se fait la correspondance, que la loi de formation resterait indéfinissable par un nombre fini de mots.

Empressons-nous d'ajouter que la plupart des mathématiciens actuels se refusent à reconnaître dans cette *correspondance à*

Hosted by Google

complexité infinie, comme il plaira de l'appeler, une correspondance véritable.

Digression sur le procédé par exhaustion.

Voici, comme dernière application de nos propriétés préliminaires sur les limites, un procédé de traitement de l'infini qu'ont employé *Euclide* et *Archimède*, qui serait dû, au témoignage de celui-ci, au mathématicien grec, contemporain de *Platon*, *Eudoxe de Cnide*, et qu'on a nommé, au XVII^e^ siècle, la *méthode d'exhaustion*.

Prenons pour l'expliquer l'exemple même d'*Euclide*, à savoir que les aires de deux cercles sont entre elles comme les carrés des rayons.

Débarrassons-nous au préalable de la démonstration moderne, fort expéditive, une fois consolidée la théorie générale des limites. Désignons par C et C′ les aires, par r et r' les rayons. Les cercles seront considérés comme les limites de polygones convexes inscrits, dont les nombres de côtés croissent indéfiniment ou mieux, si l'on veut rester en tous points rigoureux, les aires seront par définition même les limites, créées en tant que nombres irrationnels, des aires de pareils polygones. Soient P_n et P'_n les aires de deux polygones réguliers inscrits de n côtés. Leurs rayons sont respectivement ceux des cercles. On sait d'autre part que deux polygones réguliers convexes du même nombre de côtés sont semblables et que leurs aires sont entre elles comme les carrés de leurs rayons. Donc on peut écrire

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{r^2}{r'^2}.$$

Mais les limites des variables P_n et P'_n étant C et C′, le quotient $\frac{P_n}{P'_n}$ aura pour limite $\frac{C}{C'}$, comme on a vu. Quant

Hosted by Google

à $\frac{r^2}{r'^2}$ qui reste constant, quel que soit n, il est à lui-même sa propre limite et on aura finalement

$$\frac{C}{C'} = \frac{r^2}{r'^2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Passons maintenant à la démonstration euclidienne qui utilise — il fallait s'y attendre — le raisonnement par l'absurde. Elle reposait sur ce postulat que : « Si d'une grandeur on enlève la moitié ou plus de la moitié, puis de ce qui reste la moitié ou plus de la moitié, etc.... et cela un nombre indéfini de fois, la grandeur qui subsiste est aussi petite qu'on veut. »

Or, partons pour simplifier du carré inscrit. La différence entre l'aire [1] du cercle et celle du carré vaut quatre fois l'aire du segment de cercle qui apparaît dans cette inscription. Inscrivons ensuite un octogone régulier convexe qui emprunte les quatre sommets du carré. On verra aisément, en faisant la figure géométrique, que l'aire de l'octogone diffère de celle du cercle de moins de la moitié de la première différence. Et ainsi de suite en doublant successivement le nombre des côtés des polygones. De sorte qu'en enlevant à chaque fois un des polygones inscrits, la différence avec le cercle est plus petite que la moitié de la différence précédente.

Montrons dès lors que $\frac{C}{C'} = \frac{r^2}{r'^2}$.

Supposons en effet que l'on ait $\frac{C}{C''} = \frac{r^2}{r'^2}$, et prouvons que $C'' = C'$ en démontrant que la proposition contradictoire composée de $C'' < C'$ et de $C'' > C'$ est absurde.

En premier lieu on ne peut avoir $C'' < C'$. Car inscrivons deux polygones réguliers de n côtés, d'aires P_n et P'_n, n étant suffisamment grand pour que l'on ait :

$C' - P'_n < C' - C''$, ce qui est possible d'après le postulat, on en tire $P'_n > C''$.

[1] Cette démonstration d'*Euclide* présuppose la notion de l'aire du cercle comme notion *a priori*.

Hosted by Google

Mais ces polygones sont semblables et l'on a $\frac{P_n}{P'_n} = \frac{r^2}{r'^2}$.

Par suite en tenant compte de la proportion ci-dessus où entre C'', il viendra finalement $\frac{P_n}{P'_n} = \frac{C}{C''}$, égalité impossible puisque l'on a les deux inégalités $P_n < C$ et $P'_n > C''$ qui assurent, pour ces deux raisons, que le premier membre est inférieur au second.

En deuxième lieu on ne peut avoir $C'' > C'$. Ce cas se ramènerait au précédent, mais avec un échange dans l'ordre des cercles, car en écrivant $\frac{r'^2}{r^2} = \frac{C''}{C}$, ce qui est l'égalité où entrait C'' mais renversée, puis l'égalité momentanée $\frac{r'^2}{r^2} = \frac{C'}{C'''}$, on en déduirait $\frac{C''}{C} = \frac{C'}{C'''}$, d'où l'on tirerait $C''' < C$ pour les dénominateurs, puisque d'après l'hypothèse provisoire les numérateurs étaient dans le même sens, et qu'alors C''' est une valeur inférieure à C tout comme C'' était dans la première hypothèse provisoire une valeur inférieure à C'.

Il resterait bien entendu à continuer comme dans le premier cas. Vous voyez dès lors la lourdeur de la démonstration d'*Euclide*, et vous vous doutez par cet exemple que les Anciens, qui évitaient la considération directe de l'infini dont ils se sentaient à juste raison peu sûrs, devaient recommencer à chaque nouvel exemple un raisonnement analogue, ce qui était plutôt pénible.

Les Modernes — nous le verrons prochainement — n'ont pas créé l'infini de toutes pièces, mais ils ont eu le mérite de l'aborder plus franchement et plus sûrement.

Quant au nom du procédé par exhaustion lui-même, il vient du latin *exhaustio*, j'épuise, et se rapporte à la nature du postulat utilisé. Vous savez d'ailleurs que exhaustion est un terme de logique où il signifie : énumération de tous les cas possibles.

Hosted by Google

ONZIÈME LEÇON

(Suite de la précédente.)

Critique et histoire de l'infini mathématique et métaphysique.

Le concept de l'infini, sous son aspect métaphysique principalement, se prête à des interprétations multiples, à des controverses inépuisables. Sous son aspect mathématique il n'échappe point à ce défaut, comme nous nous en sommes rendus compte la dernière fois. Aujourd'hui nous détaillerons la partie critique et surtout la partie historique d'un pareil sujet. Mais les penseurs, mathématiciens ou philosophes, qui y ont réfléchi longuement, puis exprimé leur opinion, sont nombreux, et force sera de nous limiter.

N'allez pas croire, si par hasard vous lisez l'*Insecte* de MICHELET, du romantique *Michelet*, bon historien en général sauf en histoire des mathématiques en particulier, que la conception de l'infini soit brusquement née au XVII^e^ siècle, pardon ! en l'an 1600 exactement, car vous y découvrirez cette phrase emphatique : « Que savait-on de l'infini avant 1600 ? Rien du tout ! Rien de l'infiniment grand, rien de l'infiniment petit ! »

La vérité, c'est que notre historien n'ignorait pas qu'*Aristote* imposait des bornes à l'univers, que les Anciens avaient imaginé la fameuse sphère de cristal pour limiter les cieux. Il se représentait également combien l'invention du télescope avait ruiné la croyance d'un monde borné. Et surtout il avait lu en enthousiaste la pensée suivante de *Pascal* : « Quelque grand que soit un espace,

Hosted by Google

on peut en concevoir un plus grand et encore un qui le soit davantage, et ainsi à l'infini sans jamais arriver à un qui ne puisse plus être augmenté. Et au contraire, quelque petit que soit un espace, on peut encore en considérer un moindre, et toujours à l'infini, sans jamais arriver à un indivisible qui n'ait plus aucune étendue. »

Certes nos connaissances astronomiques actuelles continuant le système de COPERNIC, l'astronome polonais du XVII[e] siècle, auteur des *Révolutions célestes*, pour qui, comme pour les Pythagoriciens du reste, la terre n'est plus fixe, au centre du monde, ainsi que croyaient PTOLÉMÉE dans son *Almageste* et avant lui *Aristote* dans son *Traité du ciel*, ont changé notre conception de l'univers. Elles ont certainement reculé les bornes du monde, du monde contingent, si tant est qu'on doive le borner, mais ont-elles réussi à modifier l'idée pure de l'infini, celle du monde de la pensée cette fois ? A cela nous nous garderons de répondre trop catégoriquement.

Au sens mathématique, le mot infini, malgré son étymologie qui signifie « non fini », éveille dans l'esprit du mathématicien, du subjectiviste tout au moins, l'idée de l'*indéfini*, écartant ainsi toute idée de limite. Nous ne pouvons mieux faire que de citer à ce propos la phrase (1) typique de M. **Jules Tannery** : « La notion de l'infini, dont il ne faut pas faire un mystère en Mathématiques, se réduit à ceci : après chaque nombre entier il y en a un autre. »

Par contre un mathématicien objectiviste, s'il s'agit d'une application concrète, géométrique ou mécanique, n'hésitera pas à réaliser l'infini, en tant que limite atteinte d'une variable infiniment croissante.

Eh bien, ces deux positions, qui donnent lieu au fond aux vraies antinomies métaphysiques de la raison à concevoir le concept de l'infini, se trouvent déjà dans *Aristote*, selon l'opinion de M. *Milhaud*. La première correspondrait à ce qu'on a appelé, après

(1) Voir la préface de son livre : *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*.

Hosted by Google

le philosophe grec, l'infini en *puissance* ou potentiel, la deuxième à l'infini *en acte* ou actuel. Pourtant *Aristote*, fidèle sans doute à son principe métaphysique que nous connaissons bien désormais : « Il est nécessaire de s'arrêter quelque part », a un penchant pour la limitation, pour le fini. En tous cas il rejette nettement l'infini de grandeur, car pour lui le monde est fini. Mais il semble incliner, d'un autre côté, vers la divisibilité à l'infini de la matière, lorsqu'il combat la *théorie atomistique*, c'est-à-dire lorsqu'il s'élève dans sa *Métaphysique* contre les atomes géométriques et les lignes insécables, qu'il reproche à *Platon* lui-même.

Ferait-il, lui aussi, une différence entre la création abstraite et la représentation concrète de ce concept, différence qu'on a tant envisagée par la suite ?

Mais laissons la parole à son commentateur, dont nous donnerons plusieurs extraits empruntés à ses *Études sur la pensée scientifique chez les Grecs et les Modernes*.

Les voici par ordre :

1° « L'infini est, comme le dit *Aristote*, une illusion de la pensée qui a de quoi fournir sans fin, qui peut toujours dépasser le terme qu'elle a atteint. Mais existe-t-il, et comment existe-t-il dans le monde des réalités concrètes ? »

2° « Pour la grandeur, elle se termine nécessairement : ce qu'*Aristote* exprime en disant que l'infini de grandeur *n'existe même pas en puissance.* »

3° « Un corps quelconque peut être divisé en deux parties, chacune d'elles en deux autres, et ainsi de suite, sans que jamais il doive y avoir une fin à cette division. C'est pourquoi *Aristote* l'appelle *infini en puissance.* »

4° « *Aristote* rejette à propos du nombre l'infiniment petit (l'unité étant un minimum au-dessous duquel le nombre ne peut descendre) et l'accepte pour la grandeur : tandis qu'il accepte l'infiniment grand pour le nombre, mis en évidence dans la division illimitée d'un objet, et le rejette pour la grandeur, comme dépassant le ciel. »

5° « Certes, nous déclarerons volontiers que l'affirmation de la

Hosted by Google

divisibilité infinie de la grandeur, telle qu'*Aristote* l'a énergiquement soutenue, est plutôt le fait du mathématicien, celle de l'atome le fait du physicien. »

Si nous avons multiplié ces citations de M. *Milhaud*, c'est parce qu'elles montrent que le débat est ancien. Et de nos jours, où l'adaptation du nombre à la grandeur est si fidèle, où « les nombres imitent l'espace » pour employer une forte image due à *Pascal*, et où par conséquent les répugnances d'*Aristote* à assimiler nombres et grandeurs dans leurs rapports respectifs avec l'infini nous paraissent peu concevables, croit-on que la question soit définitivement tranchée ? Comment expliquer alors, même en restant dans le domaine purement rationnel, où l'on se sent pourtant plus à l'aise, que l'on n'hésitera pas à étudier le nombre o, à le regarder par exemple comme la limite, atteinte ou non peu importe, mais en tout cas existante d'un nombre variable infiniment petit, tandis qu'on se refusera à assurer l'existence de l'inverse de o quand il s'agira de la limite atteinte ou non d'un infiniment grand, inverse de l'infiniment petit? Cette exception, que nous avions signalée antérieurement à propos d'un théorème, n'a point reçu et ne recevra peut-être jamais de réponse satisfaisante. Nous ajouterons seulement, en nous plaçant cette fois dans le domaine des réalités concrètes, que notre esprit répugne bien moins à envisager la grandeur nulle que la grandeur infinie.

Quant à la théorie de l'atomisme portée en mathématiques, il aurait semblé, après les critiques de *Pascal*, qu'elle devait être vaincue pour toujours. Pour vous prouver le contraire, il me suffirait de vous citer un mathématicien mort récemment, Bonnel, imaginant « l'atome géométrique », le premier état de la grandeur après la grandeur nulle, et dans un sens analogue *Renouvier* imaginant ce qu'on appelle la *loi du nombre*, d'après laquelle une grandeur aurait un nombre fini de parties, serait par là-même *discontinue*.

Mais nous réservant de traiter de la continuité par la suite — cette notion est intimement liée à la notion actuelle — reprenons l'ordre historique. Nous insisterons le cas échéant sur l'infini pro-

Hosted by Google

prement philosophique qui se manifeste par exemple dans les mots d'absolu, d'éternel, de bonté infinie, qui sont chez les philosophes déistes les attributs de Dieu, comme il apparaît aussi dans cette pensée : « L'univers est l'objectivation des idées de l'être infini. » Du reste, ce sens se trouve chez les Anciens, de très bonne heure. C'est en particulier celui de *l'acte pur*, chez *Aristote*, à savoir un acte exclusivement qualitatif, semble-t-il, et qui ne soulèvera pas de contradiction si l'on dit qu'il n'est soumis à aucune limitation.

Eudoxe de Cnide (380 ans avant J.-C.), *Euclide* (300 ans avant J.-C.), *Archimède* (250 ans avant J.-C.) se sont forcément préoccupés de l'infini, à propos du procédé par exhaustion qui le présuppose, a-t-on vu. Le dernier surtout, qu'on doit considérer comme un lointain précurseur du calcul infinitésimal, calcul qui naîtra impétueusement au XVII^e^ siècle, ne pouvait guère s'en passer pour ses savantes recherches. Faudrait-il voir percer cette préoccupation chez le savant de Syracuse quand il écrit, dans son *Arénaire* : « Quant à moi je vais faire voir par des démonstrations géométriques que parmi les nombres dénommés par nous il en est qui excèdent le nombre des grains de sable d'un volume égal non seulement à celui de la terre, mais encore à celui de l'univers » ? Il est permis de ne pas le nier, bien que ce nombre de grains de sable, si énorme soit-il, est loin, à l'heure présente, de nous paraître infini.

SAINT AUGUSTIN, le plus célèbre des pères de l'église latine, (400 ans après J.-C.) formule dans son ouvrage, *la Cité de Dieu* : « et singuli quique finiti sunt et omnes infiniti sunt », ce qui, appliqué à la suite des nombres entiers se traduirait ainsi : « chaque entier en particulier est fini mais leur ensemble est infini », et répondrait assez bien à la conception des ensembles infinis étudiés de nos jours.

ALBERT LE GRAND, le philosophe théologien et l'alchimiste du milieu du XIII^e^ siècle, faisait la distinction du concept abstrait de

Hosted by Google

l'infini et de son existence concrète : « Les mathématiciens, émettait-il, n'ont pas besoin pour leur science d'une quantité infinie en réalité, car ils n'envisagent pas la quantité réelle, mais la quantité imaginaire (entendez : abstraite), et se règlent d'après la faculté de l'imagination..... Ils n'ont pas besoin d'un infini qui existe réellement, mais d'un infini qui se prête à l'imagination. »

Au XVII^e^ siècle, *Descartes* différencie l'infini de l'indéfini, mais chez lui le premier terme est le plus souvent métaphysique, applicable à l'être suprême. Ainsi il dira : « Mon entendement qui est fini ne peut comprendre l'infini. » Il est vrai qu'il l'entend aussi dans le sens mathématique quand répondant au Père MERSENNE, dont vous connaissez la figure originale de savant universel, qui lui objectait qu'un infini ne peut pas être plus grand qu'un autre, il dit : « Pourquoi non, s'il n'est plus grand qu'en *raison finie* ». Comprenez par là que deux nombres peuvent croître indéfiniment mais leur *rapport* demeurer fini, tels les nombres x et $2x$ où x représente un infiniment grand. *Descartes* avait-il alors l'intuition, le pressentiment si vous préférez, de la théorie infinitésimale, dans laquelle on dirait aujourd'hui que deux infiniment grands ou deux infiniment petits pareillement, sont de même ordre lorsque leur rapport reste fini et différent de zéro ? Mais il devient plus obscur par les termes suivants : « Il n'est pas vrai que nous concevions l'infini par la négation du fini, vu qu'au contraire toute limitation contient déjà la négation de l'infini. »

Aurait-il eu comme les théistes en général, comme son contemporain MALEBRANCHE en particulier, l'idée *innée* de l'infini ? Ce qu'il y a de certain en tout cas, c'est que *Malebranche*, oratorien et cartésien, ne partageait guère la conception aristotélicienne de la limitation de l'univers, lui qui émettait : « Nous avons toujours du mouvement pour aller plus loin. »

Quant à *Pascal* il sera plus précis que *Descartes* quand il envisagera l'infini, non par sa propre affirmation mais par la négation du fini. Il précise autrement le sens mathématique en formulant : « L'unité jointe à l'infini ne l'augmente de rien. » Et

Hosted by Google

justement cette idée se traduirait dans notre langage actuel par l'équivalence mentionnée de deux ensembles infinis en correspondance uniforme et réciproque. Il explique nettement pour la première fois que les mathématiques envisagent deux infinis : celui de grandeur et celui de petitesse, appelés maintenant infiniment grand et infiniment petit. Il met au point la signification des *indivisibles* de **Cavalieri**, le savant jésuite italien de la même époque que lui, lesquels sont devenus les *éléments différentiels* ou infiniment petits de nos surfaces et de nos volumes. Cependant *Pascal*, dans son âme de logicien et de théiste, sacrifie à la conception métaphysique de l'infini, d'abord en ces termes : « Il est faux qu'il soit pair, il est faux qu'il soit impair ; pourtant c'est un nombre (entier) et tout nombre est pair ou impair ; il est vrai que cela s'entend des nombres finis », ensuite dans les suivants : « Je ne vois que des infinis de toutes parts ».

Enfin, à un de ses fragments justement célèbre, qu'on intitule *Disproportion de l'homme*, nous emprunterons ces quelques lignes si curieuses : « La nature ayant gravé son image et celle de son auteur dans toutes choses, elles tiennent presque toutes de sa double infinité. Aussi toutes les sciences sont infinies en l'étendue de leurs recherches, car qui doute que la géométrie, par exemple, a une infinité d'infinités de propositions à exposer ? Elles sont également infinies dans la multitude et la délicatesse de leurs principes, car qui ne voit que ceux qu'on propose pour les derniers ne se soutiennent pas d'eux-mêmes et qu'ils sont appuyés sur d'autres qui, en ayant d'autres pour appui, ne souffrent jamais de dernier ? »

N'allons pas croire à première vue que cette pensée de *Pascal* contredit sa nécessité de s'arrêter, à quelque moment, soit dans les définitions soit dans les principes initiaux servant aux démonstrations. Car pour lui, si l'on ne remonte pas plus avant dans la recherche des premiers principes, c'est que l'intelligence humaine a des bornes. Et en effet, il ajoute, en substance : « C'est notre raison qui imagine un dernier principe, comme dans les choses matérielles nous appelons point invisible celui

Hosted by Google

au delà duquel nos sens n'aperçoivent plus rien, bien qu'il soit divisible infiniment et par nature. »

Spinoza, toujours au XVII^e^ siècle, envisage la grandeur continue comme susceptible de devenir infinie lorsque la raison la conçoit dans son intégrité : l'imagination seule peut la diviser et engendrer le nombre qui lui sert de mesure.

Leibniz, qui empiète sur le siècle suivant, s'occupe de cette question en mathématicien et rationaliste, puis en philosophe théiste convaincu. Au premier point de vue il combat les arguments contre l'infini en acte, ceux qui supposent que tous les infinis sont égaux : « argumenta contra infinitum actu supponunt infinia omnia esse œqualia ». Mais l'infini en puissance le rassure peut-être davantage, puisqu'il y applique complaisamment son grand principe de raison, que nous avons étudié à propos de l'induction complète. Il dira par exemple : « Il suffit pour que le prolongement d'une droite déjà prolongée puisse se faire que la même raison subsiste toujours pour aller plus loin. »

Par exemple aussi, dans ses *Nouveaux Essais*, il entre en scène sous le nom de « Théophile », qu'il fera dialoguer avec un second personnage, « Philalèthe », représentant les idées de *Locke* du reste, de la façon suivante :

PHILALÈTHE

Nous avons cru que la puissance qu'a l'esprit d'étendre sans fin son idée de l'espace par de nouvelles additions étant toujours la même, c'est de là qu'il tire l'idée d'un espace infini.

THÉOPHILE

Il est bon d'ajouter que c'est parce qu'on voit que la même raison subsiste toujours.

Pourtant son assurance de l'infini rationnel n'est pas si profonde qu'on pourrait le croire au premier abord, puisque premièrement l'appui de la représentation spatiale lui semble chancelant, car il finit par conclure que l'espace n'est qu'un « fantôme de notre esprit », puisque deuxièmement le secours de son invention en calcul infinitésimal le laisse hésitant. En effet, — et ceci vous

Hosted by Google

montrera en passant un des côtés de son tempérament nettement conciliateur, moins entier que celui de *Descartes*, pour fixer les idées, — quand on le pousse trop, il répond : « Je n'admets pas plus de grandeurs infiniment petites que d'infiniment grandes. Je tiens les unes et les autres pour des manières abrégées de parler dans l'intérêt des *fictions* de l'esprit qui servent au calcul, telles que sont les racines imaginaires en Algèbre. » Voici qui est plus explicite encore : « Et nonobstant mon calcul infinitésimal je n'admets point de véritable nombre infini quoique je confesse que la multitude des choses passe tout nombre fini ou plutôt tout nombre. Ce calcul est utile quand il s'agit d'appliquer la mathématique à la physique (1), mais je considère les quantités infinies alors comme des *fictions* utiles. »

A la vérité l'idée de l'infini, de cette « fiction », n'est pas contradictoire pour *Leibniz*, mais cela ne suffit pas pour qu'elle corresponde immédiatement à quelque chose de réel. Il n'y a pas d'infiniment grands ni d'infiniment petits, mais il estime que tout se fait en géométrie et même dans la nature comme si c'étaient de parfaites réalités.

Et comme d'une part les procédés ordinaires de la géométrie et d'autre part les expériences de physique confirment les résultats des applications du calcul infinitésimal, les infinis seront complètement justifiés aux yeux de *Leibniz*, qui devient ainsi « opportuniste ».

Sous le deuxième point de vue, quand il pense en théiste, il se raffermit et c'est au fond quand il applique le concept de l'infini à la qualité que le philosophe allemand est véritablement à son aise. La perfection infinie ne réside qu'en Dieu et Dieu dont l'entendement est infini peut dès lors entendre l'infini, tout uniment.

Fontenelle, savant, philosophe, remarquable écrivain, poète

(1) On se rappelle que, dès son apparition, le calcul infinitésimal fut appliqué au fameux « problème des cordes vibrantes » par les frères *Bernoulli*, en particulier.

Hosted by Google

à ses heures, qui eut l'avantage de vivre cent ans, (deuxième moitié du XVII^e^ et première moitié du XVIII^e^ siècle) s'occupa de l'infini, sans négliger ses origines historiques.

C'est à ce propos que *Voltaire* rima les mauvais vers suivants :

D'un nouvel univers il ouvrit la barrière ;
Des infinis sans nombre, autour de lui croissant,
Mesurés par ses mains, à son ordre naissant,
A nos yeux étonnés il ouvrit la carrière.

Vous connaissez certes ses *Entretiens sur la pluralité des mondes* et surtout ses *Eloges*, qui ont servi si souvent de modèle, mais vous ignorez sans doute un de ses ouvrages : *Eléments de la géométrie de l'infini*. Voici en substance quelques extraits de la préface de cette géométrie :

1° « Ce n'est pas qu'on connaisse mieux les nombres incommensurables ou irrationnels, mais on s'est familiarisé avec eux à force d'en rencontrer. Je crois avoir prouvé dans ce livre que les nombres irrationnels ne le sont que parce que l'infini entre nécessairement dans leur nature, mais si déguisé que les Anciens n'en avaient aucun soupçon. »

2° « Voilà l'infini plus déclaré à mesure que la géométrie avançait davantage, et le voilà accompagné de nouvelles merveilles. Au renouvellement des sciences, après la barbarie du Moyen âge, on admit ce que les géomètres grecs et leurs traducteurs avaient admis de l'infini : l'hyperbole et ses asymptotes, etc..., mais on n'eut pas l'audace de faire un pas de plus. On regarda l'infini comme un mystère qu'il fallait respecter sans l'approfondir. Il est vrai que cette timidité était fort excusable par l'extrême disproportion que l'esprit humain sent toujours entre lui et un si grand objet. »

3° « Ce n'est pas qu'effrayé lui-même de l'infini, ou craignant d'effrayer ses lecteurs, *Cavalieri*, dans sa *Géométrie des indivisibles*, ne le dissimulât le plus souvent en le masquant sous le nom d'*indéfini*, térme plus doux en apparence mais qui, bien entendu, ou ne signifie que la même chose, ou ne signifie rien. »

Hosted by Google

4° « Nous avons naturellement une certaine idée de l'infini, comme d'une grandeur sans bornes en tout sens, qui comprend tout, hors de laquelle il n'y a rien. On peut appeler cet infini : *métaphysique* ; mais l'infini *géométrique* est fort différent : c'est seulement une grandeur plus grande que toute grandeur finie, mais non plus grande que toute grandeur. Il est visible que cette définition permet qu'il y ait des infinis plus petits ou plus grands que d'autres, et que celle de l'infini métaphysique ne le permettrait pas. L'infini métaphysique ne peut ni s'appliquer aux nombres, ni à l'étendue : il y devient un pur être de raison dont la fausse idée ne sert qu'à nous troubler et à nous égarer. »

Ainsi, on le voit, *Fontenelle* ne se montrait guère partisan de l'infini en acte, de l' « infinitisme », selon un terme aujourd'hui consacré ; il apparaît, dans le domaine mathématique tout au moins, comme un véritable « finitiste » ou, dirions-nous si l'usage le permettait, comme un véritable *indéfinitiste*, partisan seulement de l'infini en puissance.

Enfin il a signalé avec un louable empressement un traité de *Leibniz* qui, comme le lui écrivait ce dernier, devait avoir pour titre *De scientia infiniti* et contenir de nombreuses applications. Il y est même revenu, dans son « Éloge de Leibniz », en exprimant ce regret : « C'est une perte considérable pour les mathématiques que cet ouvrage n'ait pas été fini. »

Au XVIII^e^ siècle, *Buffon* écrivait : « Une chose finie est une chose qui a des termes, des bornes, une chose infinie n'est que cette même chose finie à laquelle nous ôtons ses termes et ses bornes ; ainsi l'idée de l'infini n'est qu'une idée de privation et n'a point d'objet réel. Ce n'est pas ici le lieu de faire voir que l'espace, le temps, la durée ne sont pas des infinis réels ; il nous suffira de prouver qu'il n'y a pas de nombre actuellement infini. »

Kant, au XVIII^e^ siècle également, s'exprime de la sorte : « Si une grandeur est infinie, elle devra contenir une pluralité d'unités plus grande que tout nombre fini. » Il déclare renoncer aux arguments sophistiques fondés sur une conception vicieuse de cette

Hosted by Google

notion, à savoir que l'infini est une grandeur telle qu'il n'y en ait pas de plus grande. Mais à son tour il trouve le terrain chancelant et donne naissance aux célèbres antinomies de la raison pure. Nous y avons fait allusion précédemment. Indiquons maintenant que sa vaste intelligence n'a pu sortir de ce double dilemme : ou le monde a des limites ou il n'en a pas; ou il est composé de parties simples ou il est divisé à l'infini. La raison humaine, acceptant le principe logique de contradiction bien entendu, lui paraissait devoir prouver avec une égale rigueur l'une ou l'autre de ces affirmations contradictoires.

Pour cela elle utilisait le raisonnement par l'absurde, par la contradictoire si l'on aime mieux.

Puisque l'occasion se rencontre, nous indiquerons ses antinomies (mathématiques), telles que les présente la *Critique de la raison pure*.

Ire Antinomie. — *Thèse* : Le monde a un commencement dans le temps et est limité dans l'espace.

Antithèse : Le monde est infini dans l'espace et dans le temps.

IIe Antinomie. — *Thèse* : Il n'existe dans le monde que le simple ou le composé du simple.

Antithèse : Il n'y a absolument rien de simple dans le monde.

Avant de laisser notre exposé, nous nous garderons d'oublier que M. *Couturat* s'est largement inquiété de cette question dans sa thèse de doctorat *De l'infini mathématique*.

Il s'y est constitué le champion de l'infini, de l'infini en acte et non pas de l'indéfini, et cela jusqu'en mathématiques. De même que *Leibniz* – et, soit dit en passant, l'auteur possède une grande admiration pour ce philosophe, — de même que *Leibniz*, en tant que théiste, devait supposer pour Dieu un entendement infini qui lui permît de concevoir *a priori* l'infini, de même M. *Couturat*, en tant que rationaliste, est obligé de supposer à l'être humain une raison infinie pour lui permettre de « voir l'infini », selon

Hosted by Google

son expression. Citons du reste quelques-unes de ses phrases, parmi les plus caractéristiques :

« Il ne faut donc pas dire que l'infini confond la raison, mais bien que la raison confond l'imagination : ni que la nature écrase l'homme de son infinité, car s'il ne pouvait concevoir l'infini comment en serait-il écrasé ? »

« Ce qui éblouit et aveugle l'imagination, ce n'est pas une réalité extérieure à l'esprit : c'est *l'infinité même de la raison.* »

« Ainsi l'infini de la raison dépasse à la fois l'indéfini de l'imagination et le fini de l'entendement : aussi est-il vain de prétendre, soit l'enfermer dans les catégories du concept et du nombre, soit le représenter par l'imagination. »

« L'indéfini n'est pas l'image de l'infini, puisqu'il reste toujours fini : il n'en est que la parodie. »

« L'infini est une idée rationnelle dont on ne peut trouver d'image adéquate et qu'on ne peut « construire » dans l'intuition sensible. Le fait que cette idée existe et n'est pas contradictoire réfute à la fois l'axiome aristotélicien : « Pas d'idée sans image », et l'axiome kantien : « Pas de concept sans intuition. »

Ainsi pour M. *Couturat* l'idée de l'infini est pure, subjective essentiellement en tant que créée par la raison, sans représentation objective possible, et pourtant il ne se défend nullement d'affirmer l'infini concret, celui de grandeur. « Or, dit-il lui-même, s'il y a une idée dont on ne puisse trouver d'image, c'est bien sans doute celle de l'infini. » Mais laissons de côté toute critique qu'un pareil sujet rendrait par trop facile et pour conclure hâtons-nous de quitter « toutes les impertinentes subtilités qu'on a coutume de dire sur l'infini », comme avouait je ne sais plus quel jésuite du XVII^e^ siècle.

Notre conclusion sera tout à fait analogue naturellement à celle de notre étude sur l'induction complète laquelle implique l'infini.

Le mathématicien objectiviste, celui qui pense en images, répugne peut-être, tel *Aristote*, à accepter sans nécessité le nombre entier infini ou plutôt la grandeur infinie comme une limite

Hosted by Google

effective. Mais en vue d'une application de Géométrie ou de Mécanique rationnelle il sera plus catégorique et se verra contraint d'affirmer, par exemple, que le segment de droite mesuré par le nombre 2 est la limite, véritablement atteinte, d'un segment variable mesuré par la somme

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

quand n est devenu infini.

Le subjectiviste, celui qui ne se fie qu'à la raison et veut être le plus rigoureux possible, fût-ce au détriment de l'intuition, réduira l'infini en inégalité et n'admettra aucune limite réalisée. Il jugera qu'il est seulement raisonnable de s'en tenir, dans telle ou telle suite de nombres étudiée, à sa loi de formation, à ce que par exemple pour former les nombres entiers on ajoutera 1 à un entier déjà formé n pour constituer le suivant $n + 1$.

Hosted by Google

DOUZIÈME LEÇON

DE LA RIGUEUR MATHÉMATIQUE

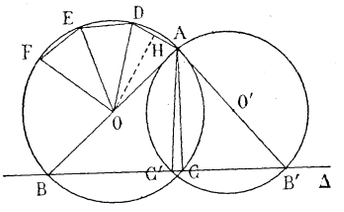
Il nous est arrivé à diverses reprises de prononcer les mots de rigueur, de rigoureux, à propos de tel ou tel raisonnement qu'il s'agissait de consolider, de telle ou telle conclusion qu'il fallait assurer. Aussi ne sera-t-il pas superflu d'insister, dans cette leçon, sur ce qu'il convient d'entendre sous le nom de *rigueur mathématique*, de cette rigueur qui paraît être et qui est à la vérité le privilège de la science mathématique.

Je vous disais que si l'on voulait éviter l'erreur, au cours des jugements de la démonstration, le choix d'une bonne méthode s'imposait, et vous vous rappelez comment le mode de raisonnement, dit réductif, remplissait ce but, dans l'étude de certains types d'équations, par exemple. Mais d'autres conditions peuvent être requises. Ainsi le succès d'une démonstration géométrique peut dépendre d'une figure exacte, à savoir faite à l'abri de toute contradiction logique. Il est de mode d'énoncer quelquefois que « la géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses ». Cette assertion risque de devenir fausse elle-même, à moins qu'elle ne fasse simplement allusion à la perfection plus ou moins accomplie du dessin de la figure, qui n'a rien à voir en effet avec la perfection immatérielle du raisonnement. Parmi les quelques exemples que l'on donne ou que l'on peut imaginer à cette occasion, nous choisirons le suivant.

Soit une droite Δ et un point extérieur A. Prenons sur Δ

Hosted by Google

deux points B et B′ et décrivons sur AB et AB′ comme diamètres deux circonférences de centres O et O′. Désignons par C et C′ les nouveaux points où les circonférences rencontrent la droite et joignons AC et AC′. Or, un théorème connu nous apprend que tout triangle qui a un premier sommet sur une circonférence et les deux autres sommets aux extrémités d'un même diamètre de cette courbe est rectangle, le premier sommet étant sommet d'angle droit. Par suite ici les deux triangles ABC et AB′C′ sont rectangles et les angles ACB et AC′B′ sont droits, en d'autres termes, les droites AC et AC′ sont perpendiculaires sur Δ. On aboutit donc à ce fait paradoxal que d'un point on peut abaisser deux perpendiculaires distinctes sur une droite. Mais la figure est fausse et la contradiction avec le seul fait qui soit vrai, savoir qu'on peut abaisser une perpendiculaire unique, disparaîtra quand les courbes passeront exactement par le pied de cette perpendiculaire unique. Ce seul exemple suffira, je l'espère, à vous mettre mieux en mesure de vous servir de cette opinion de *Leibniz* : « Ce ne sont pas les figures qui donnent la preuve chez les géomètres. La force de la démonstration est indépendante de la figure tracée. »



D'autres fois le vice du raisonnement reste davantage caché. En voici un exemple. Admettons que la longueur d'une circonférence — et vous savez qu'elle s'exprime par le nombre $2\pi r$, où r mesure le rayon, où π désigne une valeur numérique incommensurable bien connue — apparaisse comme la limite, effective ou non, de la longueur d'un polygone convexe inscrit dont le nombre des côtés augmente indéfiniment. Puis démontrons, en vue de notre exemple proprement dit, qui va suivre, que l'aire du cercle considérée comme la limite de celle du polygone en question, s'exprime par le nombre πr^2.

Dans ce but servons-nous du cercle de centre O de la figure

Hosted by Google

précédente et inscrivons-lui un polygone régulier ADEF.... Joignons OA, OD, OE, OF, ...

Nous obtenons des triangles isoscèles tous égaux au triangle OAD dont nous figurons la hauteur OH.

L'aire du polygone sera

$$\text{aire OAD} + \text{aire ODE} + \text{aire OEF} + \cdots$$

ou

$$\frac{\text{AD}.\text{OH}}{2} + \frac{\text{DE}.\text{OH}}{2} + \frac{\text{EF}.\text{OH}}{2} + \cdots$$

en remplaçant les hauteurs égales à OH par OH elle-même.

Cette expression s'écrit encore

$$\frac{\text{OH}}{2}(\text{AD} + \text{DE} + \text{EF} + \cdots).$$

Quand le nombre des côtés croît indéfiniment, OH tend vers r et $\text{AD} + \text{DE} + \text{EF} + \cdots$ tend vers $2\pi r$.

De plus une proposition de la théorie des limites apprend que la limite d'un produit de facteurs variables est égale au produit des limites.

Donc l'aire du cercle sera bien $\frac{r}{2} 2\pi r$ ou πr^2.

Cela posé, démontrons que le volume d'une sphère est $\frac{4}{3}\pi r^3$, sachant que sa surface est $4\pi r^2$.

Inscrivons un polyèdre régulier et faisons croître le nombre des faces indéfiniment.

Joignons les sommets au centre de la sphère : nous formons des pyramides toutes égales. Le volume d'une pyramide étant le tiers du produit de la base par la hauteur, nous obtenons pour le volume du polyèdre une expression analogue à la précédente, mais où le dénominateur 2 sera remplacé par 3. Les deux facteurs variables tendront vers les limites r et $4\pi r^2$, et le volume de la sphère sera finalement $\frac{r}{3} 4\pi r^2$ ou $\frac{4}{3}\pi r^3$.

En apparence le raisonnement semble rigoureux en tous points, et il a réussi à nous fournir un volume exact. Pourtant il n'en demeure pas moins un véritable paralogisme comme se

Hosted by Google

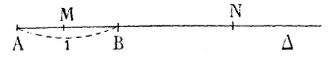
servant de figures géométriques qui n'existent pas logiquement, à savoir de polyèdres réguliers à nombre indéfini de faces. En effet il n'existe que cinq espèces de polyèdres réguliers inscriptibles dans une sphère : le tétraèdre, l'hexaèdre, l'octaèdre, le dodécaèdre, l'icosaèdre régulier, ayant 4, 6, 8, 12, 20 faces. Ce résultat était du reste connu des géomètres grecs de l'époque de *Platon*.

Un autre souci que le choix d'un mode convenable de raisonnement sera donc de se servir de notions non contradictoires, de figures géométriques, par exemple, qui soient possibles, que l'on puisse non seulement dénommer mais surtout, comme nous l'observions à propos des définitions, dont on puisse démontrer l'existence.

Une réflexion soutenue nous évitera bien des mécomptes, mais aussi plus nous serons en possession de faits, de connaissances mathématiques, et plus nous nous garderons des raisonnements vicieux. Ici comme ailleurs la mémoire a des droits.

S'il est un domaine où la rigueur doit jouer un rôle capital, c'est, vous l'avez deviné, celui de l'infini. Malheureusement c'est là où elle s'applique le plus difficilement, où l'on rencontre le plus de faits paradoxaux, sinon contradictoires. Je vous en ai déjà cité quelques-uns. En voici de nouveaux.

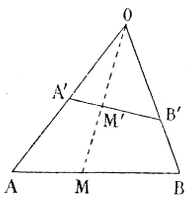
Imaginons une demi-droite Δ, partant d'un point A et s'étendant indéfiniment du côté droit par exemple. Marquons le point B, tel que $AB = 1$. Eh bien ! on doit concevoir qu'il y a autant de points compris entre A et B, sur le segment AB à l'exception de A et de B si on veut, qu'à droite de B. En effet à tout point M de AB tel que x qui mesure AM soit plus petit que 1, correspond le point N de Δ tel que $\frac{1}{x}$ qui mesurera AN soit plus grand que 1, et réciproquement d'ailleurs. Bien entendu x et $\frac{1}{x}$ peuvent être entiers, fractionnaires ou irra-



Hosted by Google

tionnels. On exprime quelquefois ce fait en disant qu'il y a autant de nombres arithmétiques compris entre 0 et 1 qu'entre 1 et l'infini, ou mieux qu'il y en a autant de plus petits que 1 que de plus grands. Sous une forme toute moderne, les deux ensembles infinis de points M et N ou mieux de nombres x et $\frac{1}{x}$, qui constituent ce qu'on appelle les éléments de ces ensembles, sont équivalents.

La correspondance uniforme et réciproque dont nous parlions l'avant-dernière fois est ici fort simple à établir, deux éléments correspondants étant inverses l'un de l'autre.



Voici un autre exemple géométrique.

Soient deux segments AB et A′B′ et le point O de concours de AA′ et BB′. A tout point M de AB la droite OM fera correspondre un point M′ et un seul de A′B′, et réciproquement. Donc les deux ensembles de points constituant les segments, et qui sont infinis, sont équivalents.

Imaginons encore l'ensemble infini des entiers successifs

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, n, \ldots,$$

et l'ensemble infini des entiers pairs successifs

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad \ldots \; 2n, \ldots$$

Ils sont équivalents ou, sous une forme un peu vicieuse, il y a autant de nombres pairs que de nombres entiers ; et faudrait-il se garder de croire et de dire qu'il y a deux fois plus d'entiers, pairs ou impairs que d'entiers pairs.

Mais prenons maintenant l'ensemble infini des nombres fractionnaires. En particulier nous avons une infinité de fractions inférieures à 1, savoir : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ pour ne prendre que celles dont le numérateur est l'unité.

En ajoutant ces diverses fractions aux entiers successifs dont nous considèrerons les intervalles, nous formons à chaque fois

Hosted by Google

une infinité de nombres fractionnaires renfermés dans chaque intervalle. Or il y a une infinité d'intervalles. Il semble donc qu'on a formé une infinité d'infinités de ces nombres et qu'ils seront autrement nombreux que les entiers.

Cette conclusion manque de rigueur justement, ne fût-ce que par le peu de clarté de ses termes. Il y a autant d'éléments dans ces deux ensembles et même il y a autant d'entiers que de fractions, quelle que soit leur forme. Plus rigoureusement, l'ensemble des fractions dont les deux termes prennent séparément toutes les valeurs entières possibles, est équivalent à celui des entiers.

Pour le prouver il suffira de montrer qu'on peut y numéroter, du même numéro, chaque fraction et chaque entier, ou, selon l'expression moderne, que ces deux ensembles sont *dénombrables*, les numéros d'ordre des entiers se confondant avec les entiers eux-mêmes.

En effet, constituons les groupes de toutes les fractions possibles dont la somme du numérateur et du dénominateur soit égale à un nombre entier déterminé, x, pour chaque groupe : x prenant successivement toutes les valeurs entières, dans leur ordre croissant. De plus, disposons dans chaque groupe, les fractions constituées, par ordre de grandeur croissante, en augmentant à chaque fois le numérateur d'une unité pendant que le dénominateur sera diminué d'une unité, pour que la somme des deux termes reste constante. Nous obtenons les groupes suivants :

$$\frac{1}{1}\,;\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1}\,;\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1}\,;\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1}\,;\ \ldots\,;\ \frac{1}{x-1},$$

$$\frac{2}{x-2},\ \frac{3}{x-3},\ \ldots\ \frac{x-3}{3},\ \frac{x-2}{2},\ \frac{x-1}{1}\,;\ \ldots$$

Il est manifeste que toute fraction qu'on imaginera sera obtenue forcément par ce procédé, puisque la somme de ses deux termes est un entier quelconque, tel que x, et que toutes les fractions à somme de termes égale à x ont été constituées. Il ne reste alors maintenant qu'à numéroter toutes les fractions de ces divers groupes, dans l'ordre où elles se présentent, pour que

Hosted by Google

cet ensemble infini de fractions devienne équivalent à celui des entiers et dénombrable comme lui.

Certes tous les ensembles infinis ne sont pas dénombrables et je me contenterai de vous signaler pour le moment (1) que l'ensemble de tous les nombres arithmétiques possibles, rationnels ou irrationnels, même soumis à la condition d'être inférieurs à 1, ne l'est pas. Il sera dit *non dénombrable*.

Enfin voici un dernier cas où l'intervention de la rigueur est délicate ; c'est celui des équations fractionnaires.

Soit par exemple l'équation

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{(x-1)^2}{x-1} = 0.$$

Donnons à x la valeur numérique 1. La fraction au premier membre se présente sous la forme *illusoire*, selon l'expression consacrée, $\frac{0}{0}$. Or, cette fraction n'a pas de sens véritablement rationnel puisqu'on n'a jamais à considérer une fraction de dénominateur 0. Si elle peut en acquérir un, ce sera un sens purement conventionnel. En remarquant en effet que tout nombre multipliant 0 reproduit 0 et qu'une fraction $\frac{a}{b}$ est justement le nombre qui multipliant b reproduit a, on peut, malgré que b soit toujours un nombre différent de 0, convenir que $\frac{0}{0}$ représente un nombre quelconque, à la condition qu'aucune contradiction n'en résulte. Et à première vue l'équation ne semble pas satisfaite ou plutôt si, quand on y fait x égal à 1, car d'une part le premier membre ne prend pas plus volontiers la valeur 0 que toute autre valeur, et d'autre part le premier membre prend la valeur 0, ce qui l'égale par suite au second (et c'est ce qu'on veut dans le problème de la résolution d'une équation).

A deuxième vue elle sera satisfaite mais aux termes d'une nouvelle *convention*. En effet, tant que x reste différent de 1, la

(1) Voir note finale N° II, dans la deuxième partie.

Hosted by Google

fraction $\frac{(x-1)^2}{x-1}$ se réduit à $x-1$ et ne peut égaler le second membre.

Si nous imaginons que x représente pour un moment un nombre variable qui tende vers 1, cette fraction toujours égale à $x-1$ tendra vers 0, et cette fois 0 n'est pas sa valeur pour $x=1$ mais bien sa valeur limite quand x possède 1 pour limite. De sorte que la signification habituelle d'une équation étant laissée de côté, on conviendra de rechercher la valeur numérique de x qui assure comme limite du premier membre, le nombre 0 du second membre. Et rien n'empêche désormais d'appeler cette valeur la racine de l'équation. Remarquons en outre que cette limite, ici 1, n'est pas forcément atteinte et même c'est dans le sens subjectiviste en quelque manière, où une variable n'atteint pas sa limite, que la conclusion reste rigoureuse. En tout cas ce qu'on pourrait formuler avec une entière rigueur dès le début, c'est que tout nombre différent de 1 n'est pas racine de l'équation, jugement purement négatif, comme on voit.

Ecrivons maintenant notre équation sous la forme

$$\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{2x}{x-1}.$$

Tant que x reste différent de 1 nous sommes sûrs que les deux membres sont inégaux, puisque leur différence, que nous examinions précédemment, différait de 0. Lorsque x prend la valeur 1, les deux membres se présentent sous la forme $\frac{2}{0}$ et n'ont plus de sens. Il arrive seulement que si x varie en tendant vers 1 les fractions en question deviennent des infiniment grands, toujours différents, qui se rapprochent du reste d'autant plus l'un de l'autre que x se rapproche de 1, vu que leur différence se rapproche de 0. Faut-il en conclure qu'elles ont la même limite ? Non, puisque précisément la limite d'un infiniment grand n'existe pas, comme on se souvient. Ce serait donc un pur abus que de voir dans 1 une racine de cette équation. Les fractions admettent $\frac{x^2+1}{2x}$ pour rapport, tant que x diffère de 1, et ce

Hosted by Google

quotient admet 1 pour limite en même temps que x (le mot de limite étant encore entendu au sens subjectiviste). Le seul jugement rigoureux à porter consistera en ce fait que les deux membres sont deux infiniment grands, lorsque $x - 1$ est un infiniment petit, ayant une limite de rapport égale à 1 ou selon l'expression habituelle sont deux *infiniment grands équivalents*.

En résumé, on ne saurait jamais assez prendre de précautions pour raisonner juste à propos de l'infini. Ce souci, nous le trouvons apparemment chez les premiers géomètres grecs, essayant le procédé par l'absurde en face de cette notion, plutôt que sa considération directe. Certains de leurs commentateurs assurent que leur conception de l'infini restait vague. On a soutenu que le terme d'indéfini n'existait pas chez eux, ainsi qu'au Moyen âge au demeurant, et qu'Euclide employait le mot infini dans son sens le plus absolu (1).

Certes l'intelligence humaine est perfectible comme tant d'autres facultés — et Condorcet affirmant, dans les conditions que vous savez, sa croyance au progrès, ne nous aurait pas démenti —, et tel concept, tel jugement qui sous une certaine forme paraissait rigoureux autrefois, ne le paraît plus aujourd'hui, a pris une nouvelle forme plus convaincante, qui se modifiera dans l'avenir. Cependant comment expliquer le soin qu'apporte *Euclide* pour démontrer par l'absurde, un peu longuement mais avec rigueur, la proportionnalité des aires des cercles et des carrés de leurs rayons, par exemple ? Il aurait pu certes accepter la proposition par raison d'analogie, par vue intuitive, inductive si on veut. Et pour cela il lui eût suffi d'employer le raisonnement suivant, encore courant dans nos classes. Le rapport des aires de deux polygones réguliers inscrits du même nombre de côtés étant égal au rapport des carrés des rayons et chaque polygone devenant à la limite le cercle correspondant, les aires des cercles sont donc entre elles comme les carrés des rayons. Ce que les Modernes ont ajouté en vue de la rigueur, c'est de ne plus accepter que l'aire du

(1) Opinion de *Bonnel* en particulier.

Hosted by Google

cercle existe *a priori* en tant que nombre qu'il s'agira de déterminer ensuite avec une approximation convenable. On se rappelle d'ailleurs que ce nombre πr^2 est irrationnel et que π, quand $r = 1$, a été étudié par *Archimède* lui-même. Au contraire l'aire du cercle est devenue, par définition même[1], la limite d'une suite infinie de nombres, mesures des aires des polygones inscrits, cette limite irrationnelle n'étant pas effectivement atteinte mais correspondant à une certaine coupure de nombres rationnels. De plus on prend la précaution de montrer que la loi d'inscription des polygones reste sans influence sur la limite. Ici la question se complique même parce que les valeurs approchées de l'aire du cercle, celles des polygones, sont à leur tour des irrationnelles. Enfin la notion de limite a subi à son tour un traitement rigoureux et le nombre π est devenu ce qu'on appelle un nombre *algébrique transcendant*, c'est-à-dire qu'on ne saurait former aucune équation à coefficients rationnels admettant π pour racine, comme on peut le faire pour le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ par exemple qui se nomme *nombre algébrique* simplement, en tant que racine de l'équation $x^2 - 2 = 0$.

Critique et histoire.

Tous les penseurs, à toutes les époques, se préoccupent de la vérité, de quelque ordre qu'elle soit. « C'est principalement pour elle qu'ils travaillent », écrivait *Leibniz*, qui brûlait lui-même de la « rendre plus recevable » et voulait empêcher, par ses argumentations puissantes, que « l'autorité ne prévaille à la raison en quelques points de conséquence ». Mais ce mot de vérité nous suggère aussitôt son antithétique, celui d'erreur. « Vérité en deça, erreur au delà » exprimait *Pascal*, non à propos des mathématiques heureusement. « Il faut bien noter ces deux points, *ne pas supposer vrai ce qui est faux et tâcher d'arriver à la con-*

[1] Pour mieux se pénétrer des gradations successives dans l'élaboration du concept de l'aire mathématique, lire, dans l'*Enseignement mathématique* de 1908, l'article de M. *Lebesgue* : *Sur la définition de l'aire des surfaces*.

Hosted by Google

naissance de toutes choses », conseillait *Descartes* dans ses *Regulæ*, à propos de la « nécessité d'une méthode dans la recherche de la vérité ». Aussi les mêmes penseurs dans leur recherche de la vérité ont-ils voulu éviter l'erreur.

Aristote signale déjà des raisonnements à réfuter. On se souvient des luttes dialectiques des Anciens, des essais de réfutation des sophismes de *Zénon d'Elée* — nous en avons examiné un, en particulier —, de l'ingénieuse classification des erreurs de la scolastique par *Bacon*.

Euclide lui-même, dans un écrit qui ne nous est point parvenu, aurait, au dire du commentateur *Proclus*, « énoncé séparément et en ordre les divers genres de faux raisonnements, exerçant pour chacun notre intelligence par des théorèmes de toute sorte, où il oppose le vrai au faux, et où avec la preuve il fait concorder la réfutation de l'erreur ».

Le grand théologien et philosophe du XIII^e^ siècle, SAINT THOMAS D'AQUIN, combat théologiquement les erreurs des Grecs et déjà, dans un de ses écrits *De veritate*, se préoccupe des conditions de l'évidence.

L'évidence est la qualité des propositions mathématiques conférée par la démonstration, avons-nous eu l'occasion de voir. « L'évidence appartient aux sciences mathématiques et n'appartient qu'à elles » déclarait *Buffon*. En général l'évidence est la qualité de certaines propositions qui fait qu'elles s'imposent à l'esprit avec une force telle qu'on ne peut les nier « sans une peine intérieure et des reproches secrets de la raison » suivant une expression de *Malebranche*, auteur de la *Recherche de la vérité*.

Mais vous savez que *Descartes*, avant ce dernier, avait tenté une théorie de l'évidence, à la vérité psychologique. Rappelons-nous ce que nous nommions son axiome de l'évidence, qui lui faisait prendre pour vraies les choses qu'on conçoit « clairement » et « distinctement ». Ne serait-ce que le premier, un des quatre préceptes qu'il donne dans la *Méthode* vous revient à la mémoire : « Ne recevoir jamais aucune chose pour *vraie* que je ne la connusse *évidemment* être telle. »

Hosted by Google

Or, ce précepte ne va pas sans quelque difficulté d'application. A quel caractère reconnaître que les jugements sont clairs, distincts, évidents pour tout dire?

Hobbes, philosophe sensualiste anglais avec tendance au scepticisme, peu satisfait sans doute du signe de la vérité que proposait *Descartes* le lui reprochait déjà de son vivant. Il s'informait : « Pourquoi M. Descartes n'a-t-il pas mis d'enseigne à l'hôtellerie où séjourne l'évidence, afin d'empêcher que chacun ne se crût en droit d'y loger son opinion ? ».

Leibniz, qui a fait également un reproche facile à la philosophie et même à la logique cartésiennes d'être insuffisantes sur le chapitre de l'évidence n'a pu en fournir, lui aussi, un critérium sûr, absolu, qui n'existe pas du reste.

Tout au plus indiquera-t-on ce caractère de l'absence de contradiction, qui semble la véritable ressource, même en mathématiques, que nous avons signalé bien souvent à l'occasion, et qui fut considéré par *Aristote*, *Leibniz*, *Renouvier*, pour ne citer que ceux-là. Mais il n'en demeure pas moins un critérium subjectif, psychologique.

Les règles pour apprendre à raisonner juste seront-elles plus efficaces? « Les règles, disait *Condillac*, sont comme les garde-fous qu'on met sur les ponts ; ce ne sont pas eux qui font marcher les voyageurs, seulement ils les empêchent de tomber. »

La légende (1) rapporte qu'*Euclide* aurait répondu au roi Ptolémée Soter qui voulait qu'on lui rendît plus faciles les mathématiques : « En géométrie, il n'y a pas de chemin royal. »

Aussi notre réponse ne saurait être affirmative..... Au reste, il n'y a qu'à se reporter aux règles classiques de *Pascal* sur les démonstrations pour retrouver les mots d'obscur, d'évident, que l'auteur n'a garde de nous expliquer. Il les explique d'autant moins que le point de départ de la logique de *Pascal* est précisément l'impossibilité d'expliquer les vérités premières.

Dans ses démarches à la recherche de la vérité, l'esprit semble

(1) D'après *Proclus*.

Hosted by Google

donc peu armé. Nous faudra-t-il en dernier ressort consentir à la thèse opportuniste de *Leibniz*, acceptant certaines notions, certaines « fictions », d'après son expression, telles que l'infini, les racines imaginaires, parce qu'elles sont utiles et qu'elles réussissent ? En tout cas on ne saurait accepter le raisonnement ci-dessus où intervenaient des polyèdres réguliers, fictifs, eux, dans toute la force du terme !, sous le prétexte qu'il réussissait..... à obtenir le résultat exact. De préférence nous nous rallierions à son fameux *ars inveniendi* qui le poussait jusqu'à rechercher à côté de la logique de la démonstration la logique de *l'invention*. « La science, a-t-il écrit, veut un certain art de deviner sans lequel on n'avance guère. » Ou alors, en transformant une prescription imposée à quiconque voulait devenir philosophe, en conseil, un peu platonique, ...! donné à qui voudrait devenir mathématicien, nous nous bornerons aux mots légendaires de *Platon* : Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω « Nul n'entre ici s'il n'est géomètre ».

Mais revenons à la rigueur mathématique. S'il est recommandable de nous l'imposer quand, le cerveau une fois mûri, nous sommes en état de la goûter, sera-t-il opportun de l'exiger de la part des esprits encore peu exercés dans la science exacte ?

Dans ses *Éléments de géométrie*, le jeune académicien Clairaut, connu surtout par ses travaux en astronomie, demandait, vers le milieu du XVIII^e^ siècle, qu'on n'impose pas aux débutants la fatigue et l'ennui d'une rigueur inutile, car il poursuivait ce double avantage « d'intéresser et d'éclairer les commençants ».

Un siècle plus tard, un savant allemand, versé dans la haute Analyse, Jacobi, écrivait : « La rigueur des démonstrations est une invention des Grecs qui fait le plus grand honneur à l'intelligence humaine ; mais elle n'est une nourriture convenable et saine que pour les jeunes gens dont l'esprit a déjà une certaine maturité : alors seulement la géométrie logique est, comme la grammaire, une véritable éducation de l'intelligence. »

Hermite, qui peut se classer au premier rang des mathématiciens de la fin du siècle dernier, et dont on disait que si quel-

Hosted by Google

qu'un pouvait « voir » l'infini c'était bien lui, écrivait à son tour: « *Bacon* (de Vérulam) a dit que l'admiration est le *principe du savoir*. Sa pensée qui est juste en général, l'est surtout à l'égard de notre science, et je m'en autoriserai pour exprimer qu'on fasse pour les études une part plus large aux choses simples et belles qu'à l'extrême rigueur aujourd'hui si en honneur mais bien peu attrayante pour les commençants qui n'en peuvent comprendre l'intérêt. »

Ainsi l'avis est unanime, et même, à cette heure, on a dans l'enseignement élémentaire une tendance marquée à le suivre. Pour nous qui ne sommes plus des débutants, nous continuerons à apporter dans la suite de notre étude en commun toute la rigueur désirable.

Vous n'aurez désormais aucune peine à croire que la rigueur ne règne pas de temps immémorial dans les œuvres des mathématiciens. La lecture des anciens écrits surtout, mais non exclusivement, vous édifierait à cet égard. En particulier celle du premier document mathématique connu, consistant dans un « manuel du calculateur égyptien », dû à un scribe, le prêtre **Ahmès**, et conservé au Musée britannique de Londres sous l'inscription de *papyrus de Rhind* (1). D'après des recherches d'exégèse historique, ce papyrus remonterait à l'an 2000, environ, avant notre ère. En sautant par-dessus l'antiquité grecque, où la démonstration généralement parfaite se crée véritablement — on trouve déjà l'équivalent des quatre lettres classiques C.Q.F.D, abréviation de : ce qu'il fallait démontrer, dans un document remontant aux pythagoriciens, Ἱστορία πρός Πυθαγόρου : tradition selon *Pythagore* — si nous parvenons à l'Occident latin du Moyen âge, nous aurons de quoi nous convaincre davantage. Là en effet, vous vous le rappelez, les démonstrations ont disparu, au cours des pérégrinations subies par les textes grecs, traduits par les Arabes, émigrés en Orient, revenus en Occident. Seuls les énoncés des propositions subsis-

(1) Il a été déchiffré par *Eisenlohr : Ein mathematisches Handbuch der alten Ægypter*.

Hosted by Google

tent et sont acceptés comme articles de foi, ce qui répond bien du reste au caractère de cette époque. Puis la Renaissance, commencée par *Léonard de Vinci*, continuée au XVI^e^ siècle par une belle floraison de savants, d'algébristes italiens, et plus tard au XVII^e^ siècle trouvant son apogée parmi les mathématiciens ou philosophes français, allemands et anglais, succédera à la nuit intellectuelle du Moyen âge. Mais la rigueur n'est point complète, certes, dans les inventions ou les reprises des connaissances mathématiques. Pour vous en fournir la preuve, je vous donnerai certains exemples typiques.

Voici d'abord, vers 1600, **Képler** dont vous connaissez les lois, astronome allemand et écrivain au théisme enthousiaste, qui voyait volontiers des « âmes conduisant les astres célestes », dont le génie en un mot fut entâché de quelques divagations : « J'entreprends de prouver, assure-t-il, que Dieu, en créant l'Univers et en réglant la disposition des Cieux, a eu en vue les cinq polyèdres réguliers de la géométrie, célèbres depuis *Pythagore* et *Platon*, et qu'il a fixé, d'après leurs dimensions, le nombre des Cieux, leurs proportions et leurs mouvements. » !!

Eh bien, *Képler* non seulement étudia mais produisit des mathématiques. En particulier il obtient le volume de la sphère, non certes en utilisant des polyèdres réguliers inscrits à nombre indéfini de faces, comme nous faisions intentionnellement, mais un polyèdre de nature quelconque à nombre infini de faces. Puis il considère que la sphère solide est le « composé », comme il dit, d'une infinité de petites pyramides appuyées par leur base sur les faces du polyèdre, donc sur la surface de la sphère, et ayant leur sommet au centre. Sans se préoccuper le moins du monde de ce que les pyramides de décomposition d'un polyèdre de nature quelconque ne sont pas égales et en confondant sans hésitation la surface de la sphère et celle du polyèdre qu'il a inscrit, il considère ensuite que les hauteurs des pyramides sont égales entre elles et, qui plus est, au rayon de la sphère. Il termine enfin son raisonnement comme nous avons fait nous-même. Aujourd'hui cette démonstration serait inacceptable et vous vous

Hosted by Google

rappelez le détour assez long qu'on prend, pour arriver à obtenir élémentairement l'expression $\frac{4}{3}\pi r^3$.

En outre, d'autres formules qu'il donne sont cette fois inexactes. Quoi qu'il en soit, il a droit par ailleurs à notre juste admiration, et c'est pour longtemps sans doute que, selon l'auteur du beau livre *Les fondateurs de l'astronomie moderne*, JOSEPH BERTRAND : « La gloire de *Képler* est écrite dans le ciel. »

Voici maintenant l'illustre *Descartes*, dont *Voltaire*, qui s'y connaissait, a dit, dans ses *Lettres philosophiques* : « Ceux qui ont osé avancer que *Descartes* n'était pas un grand géomètre peuvent se reprocher de battre leur nourrice ».

Eh bien, au cours de sa *Géométrie*, qui l'immortalisera auprès des mathématiciens comme sa *Méthode* l'a déjà immortalisé au regard des philosophes — les deux œuvres datent de 1637 — *Descartes* se laisse aller, d'ici de là, à des inexactitudes. Au surplus, il affirme, sans nul souci de démonstration, rigoureuse ou non, qu'une équation a autant de racines, existantes ou non existantes, réelles ou imaginaires, si vous préférez, qu'il y a d'unités dans sa « dimension», en d'autres termes dans son degré. C'est énoncer ainsi par anticipation, d'instinct mathématique en quelque sorte, le théorème le plus fondamental peut-être de l'algèbre, qui subira par la suite des essais infructueux de justification et n'acquerra son droit de cité définitif qu'entre les mains de *Gauss*.

Voici enfin le Calcul infinitésimal, le « nouveau calcul de MM. *Leibniz* et *Newton* » manquant, à sa naissance, de véritable assurance, de jugements rigoureux, ce qui aurait fait conseiller, dit-on, par la belle humeur de *d'Alembert* : « Allez de l'avant, la foi vous viendra. » Les uns l'acceptent, d'autres le condamnent. *Leibniz* lui-même hésite à entraîner l'adhésion générale. Quand paraît l'ouvrage du marquis de L'HÔPITAL, l'*Analyse des infiniment petits*, le premier dans la matière, on chansonne ces derniers en les raillant.

Hosted by Google

Et que penser, de nos jours, du domaine, mystérieux malgré tout, de l'infini, où les théories des nombres irrationnels, des limites, des ensembles infinis s'élaborent, se perfectionnent et *tendent* — c'est le cas de le dire — de plus en plus vers la rigueur ! Telle démonstration reçue, il y a quelque cinquante ans, ne le serait plus à l'heure actuelle.

Les principes des mathématiques eux-mêmes reçoivent une attention particulière, se réduisent sous les efforts répétés des « logisticiens » au plus petit nombre possible de postulats indépendants. Comparant la géométrie classique aux géométries édifiables d'après chaque système initial de postulats, M. *Couturat* exprime cette opinion qui ne laissera pas de vous causer quelque étonnement : « Il est assez piquant, écrit-il, de constater que la réputation de rigueur dont la géométrie d'Euclide a joui pendant des siècles était absolument usurpée, et qu'elle ne méritait guère de passer, aux yeux des philosophes rationalistes du XIX^e^ siècle, pour le modèle et le type de la déduction logique. »

La pensée de M. *Jules Tannery* : « L'histoire montre que certains raisonnements correspondent à une divination incomplète de la vérité comportant une part d'erreur que le progrès de la science permettra d'éliminer un jour », est significative également.

Mais ce mot de divination nous remet en mémoire « l'art de deviner » de *Leibniz*. Et voilà que nous touchons, que nous revenons plutôt, à un sujet d'ordre psychologique, à celui de l'évidence et mieux encore au sujet plus général de l'intelligence. Du reste, *Descartes* considérait l'évidence comme une vive lumière intellectuelle par laquelle l'intelligence est enchaînée.

L'intelligence, presque synonyme en philosophie d'entendement ou d'intellect, est essentiellement la faculté de connaître, plus particulièrement la faculté de comprendre. On peut à la vérité reconnaître les signes de l'intelligence ; quant à en fixer les lois, à l'assujettir à des règles, il n'y faut pas compter. On se bornera à étudier les manifestations de cet élément indispensable de la connaissance, à en suivre l'évolution, et on se souvient que *Taine* l'a fait dans son livre *De l'intelligence* paru en 1870.

Hosted by Google

Aussi — est-ce un bien, est-ce un mal ? — l'éternelle question du « pourquoi et du comment » demeure presque entière, depuis *Aristote*. Ce qui importe à l'esprit, c'est non pas tant qu'une chose est, mais pourquoi elle est.

On trouve cette faculté décrite chez les Anciens.

Anaxagore, qui ouvrit au v^e^ siècle avant Jésus-Christ, la première école de philosophie, à Athènes, voit dans l'intelligence qu'il dénomme νοῦς, mot classique que reprendront ses continuateurs hellènes *Platon* et *Aristote*, une sorte de force, de principe de mouvement, qui anime la matière, qui constitue l'âme des choses.

En particulier, aux termes de la théorie aristotélicienne de la *puissance*, toute connaissance qui est d'abord *en puissance* dans notre entendement, y devient *en acte* définitivement, sous l'impulsion du νοῦς ἀπαθής, savoir de « l'esprit pur ».

Les sceptiques grecs refusent que l'esprit humain ait la nette intelligence des choses, puisse rien connaître avec certitude.

Saint Thomas d'Aquin considère l'intelligence comme le premier principe : « primus intellectus est origo rerum »

Chez *Descartes*, c'est une sorte de sens interne, de lumière naturelle qui a pour fonction de distinguer le vrai du faux.

Chez *Pascal* elle correspond à une lumière naturelle également, à une espèce d'intuition qu'on retrouve en quelque mesure dans la divination de *Leibniz*.

Mais heureusement, l'intelligence, même l'intelligence des mathématiques, est perfectible. Elle s'affine non seulement dans le cours des temps, mais aussi pendant la durée de la vie humaine. « Je vois les limites de mon esprit ; je ne vois pas celles de l'esprit humain », disait *Taine*.

Vous est-il arrivé, après quelquefois de longs efforts de pensée, après une longue contention d'intelligence, que soulagea plus ou moins l'aide de votre mémoire, sinon de découvrir quelque connaissance mathématique nouvelle, du moins de parvenir au bout d'un problème à résoudre, d'une démonstration à légitimer ?

Hosted by Google

Alors une satisfaction intime a dû vous dédommager de vos peines. La légende raconte que les Pythagoriciens faisaient des sacrifices aux divinités quand ils avaient découvert certaine vérité. Ne va-t-elle pas jusqu'à nous présenter *Archimède*, dans une tenue peu décente, criant dans les rues de Syracuse son célèbre εὕρηκα !

Si par contre vous ne trouvez pas tout de suite le résultat proposé, ne vous découragez point : dites-vous, comme *Buffon*, que « le génie est une longue patience », ou rappelez-vous que *Newton* répondait à qui l'interrogeait sur la manière dont il avait découvert la loi de gravitation : « En y pensant toujours ».

Hosted by Google

TREIZIÈME LEÇON

LA MATHÉMATIQUE ET LA PHILOSOPHIE

Bientôt va se terminer la première partie de nos leçons sur les généralités. Dans la deuxième, nous aurons dès lors à aborder la partie technique, en quelque façon, touchant les notions fondamentales de ce qu'on appelle l'*Analyse mathématique*. Et pour ce but nous étudierons d'abord le *nombre entier* qui en est la véritable base, le pivot autour duquel on tend de plus en plus à faire graviter toute mathématique, vraiment digne de ce nom; puis le *nombre fractionnaire* ou *fraction*, considéré comme symbole de grandeur et ayant de ce fait une existence proprement individuelle, ou considéré comme un système de deux nombres entiers et par suite de ce fait tributaire de l'entier ; puis le nombre *incommensurable* ou *irrationnel* envisagé également sous les deux points de vue précédents, comme attaché *a priori* à la grandeur incommensurable ou comme rattaché *a posteriori* au nombre entier par l'intermédiaire d'une infinité d'entiers et de fractions. Ces trois espèces de nombre sont les *nombres arithmétiques*, qui constituent les fondements de l'*Arithmétique*.

Nous étudierons ensuite les nombres *positifs* et *négatifs* qu'on avait appelés jusqu'à présent *algébriques*, qu'on commence de nommer *qualifiés* et qu'on a dû imaginer lorsqu'on a examiné une certaine qualité des grandeurs, leur *sens*, que ne pouvaient préciser les nombres arithmétiques ; puis le nombre *imaginaire* ou *complexe* (la première épithète ayant, semble-t-il, quelque discrédit), qui est intervenu dès que les nombres positifs et négatifs

Hosted by Google

n'ont plus suffi à leur tour. Ces deux nouvelles catégories de nombres sont les nombres qualifiés *algébriques et transcendants*, au sens moderne des mots, et constituent les fondements de l'*Algèbre*. Nous les rattacherons au nombre entier du reste, par le concours des *signes*.

Nous aborderons encore la notion de fonction ; d'abord au point de vue élémentaire, objectif, comme étant celle d'un nombre d'espèce quelconque, essentiellement variable en même temps que certains nombres proposés, ayant avec eux une certaine dépendance, une certaine relation que traduira une *formule* explicite, dite *équation* s'il s'agit de figurer par une courbe graphique la variation de la fonction ; ensuite au point de vue transcendantal, subjectif, comme étant celle d'une *correspondance* plus ou moins explicitée, plus ou moins complexe, entre les diverses valeurs numériques d'un nombre qui sera la fonction et celles d'autres nombres qui seront les variables indépendantes. D'ailleurs l'étude des fonctions se commence déjà en Algèbre et repose à son tour sur l'Arithmétique.

Enfin nous pousserons plus avant l'étude de la fonction par le secours de la notion de l'*infiniment petit* qui nous permettra de suivre avec plus de précision la variation de la fonction, sa marche, d'en signaler ses particularités, ses « accidents », d'après un terme de philosophie.

Ce sera pénétrer ainsi, avec l'infiniment petit, dans le domaine de l'*Analyse infinitésimale* ou transcendante, qu'on nomme plus vulgairement le *Calcul infinitésimal*, constitué au demeurant par le *Calcul différentiel* et le *Calcul intégral*.

Nous ne resterons pas pourtant toujours dans les régions abstraites de cette Analyse mathématique, où règnent le nombre et ses diverses combinaisons, mais nous aurons recours à l'occasion à la Géométrie, abstraite bien entendu, pour définir, par exemple, de nouveaux concepts, de nouvelles combinaisons et même pour réaliser des démonstrations à propos de nombres.

De la sorte, nous nous occuperons enfin de deux domaines mixtes : l'*Arithmétique géométrique*, si ancienne, et la *Géométrie*

Hosted by Google

analytique, plus récente, et qu'il serait peut-être mieux séant de dénommer « Algèbre géométrique ».

Critique et Histoire.

Certes nous n'entendons plus de nos jours, sous le nom de sciences mathématiques, ce que les Grecs appelaient la *Mathématique* (ἡ μαθηματική, le mot provenant du verbe μανθάνω, je sais, je devine) et qui était pour eux la Science en général et se confondait du reste avec la *Philosophie* (φιλοσοφία, sagesse).

La science actuelle est trop étendue pour garder son unité ancienne. Aussi se subdivise-t-elle en un assez grand nombre de sciences particulières, parmi lesquelles se classent la science mathématique, empruntant le minimum possible de notions au monde extérieur, relevant de plus en plus de l'entendement, et la science philosophique, constituant la connaissance de l'être, des principes, des causes, de la pensée en général : en un mot, représentant, suivant la belle expression de *Claude Bernard*, « l'aspiration éternelle de la raison humaine vers la connaissance de l'inconnu ».

Aristote admettait une science fondamentale : φιλοσοφία πρώτη ou philosophie première, dont l'étude est l'essence même des choses et qui est proprement notre métaphysique, ou recherche critique des premiers principes. D'ailleurs *Descartes*, plus tard, emploiera indifféremment dans le même sens, tantôt métaphysique, tantôt philosophie première. N'a-t-on pas traduit par « Méditations métaphysiques » le titre de son ouvrage *Meditationes de prima philosophia* ? De même le dernier ouvrage de *Leibniz*, la *Monadologie*, et qui est une vue d'ensemble sur tout son système métaphysique, n'a-t-il pas été primitivement dénommé *Principes de philosophie première*? Eh bien ! *Aristote* fait justement remarquer, dans sa *Métaphysique*, que *Platon* opère la fusion entre la mathématique et la philosophie, par sa théorie des Idées-Nombres. Cette fusion, *Bacon*, *Descartes*, *Leibniz* la faisaient volontiers,

Hosted by Google

eux aussi. Au surplus, nous avons eu l'occasion d'indiquer que la dénomination de « philosophie naturelle », savoir le système philosophique s'appuyant sur les faits du monde réel, signifiait science physique, aux yeux de *Newton* par exemple. En anglais, notre mot Physique se traduit encore par « natural philosophy ».

Kant voyait dans les mathématiques « pour ainsi dire un pont entre la métaphysique et la physique », en digne newtonien qu'il était resté.

Il est malaisé de fournir une bonne définition de la science mathématique, comme aussi de faire une classification nette des subdivisions qu'elle présente.

Cette difficulté nous apparaîtra si nous nous rappelons que certains mathématiciens intransigeants, les subjectivistes précisément, voudraient déjà cataloguer la géométrie parmi les sciences physiques. En outre, la ligne de démarcation entre l'algèbre et l'arithmétique, entre l'algèbre et l'analyse infinitésimale, est peu apparente. *Newton* n'avait-il pas réuni l'arithmétique, l'algèbre et l'application de celle-ci à la géométrie, dans son *Arithmetica universalis* ? L'illustre *Gauss* n'a-t-il pas fait paraître, en 1801, un ouvrage de haute portée scientifique *Disquisitiones arithmeticæ*, dans lesquelles recherches il allie l'algèbre à l'arithmétique supérieure ?

Nous tenterons cependant une telle définition, mais en nous plaçant au point de vue plus habituel du mathématicien objectiviste.

Dans ce but nous nous adresserons à la *grandeur* — on disait autrefois « quantité » —, à la grandeur entendue, non au sens philosophique de « tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution », mais au sens mathématique d'une grandeur *mesurable*. Une grandeur mesurable est une grandeur susceptible d'une comparaison précise avec une grandeur-type, ce qui nécessite, comme vous connaissez, la définition rigoureuse de l'égalité et de l'addition de pareilles grandeurs. Le résultat de la comparaison est du reste un nombre, qu'on nomme *mesure*.

Or, *Descartes*, à la recherche d'une science générale, d'une

Hosted by Google

mathématique universelle, a écrit dans ses *Regulæ* : « J'ai découvert que toutes les sciences qui ont pour but la recherche de l'ordre et de la mesure se rapportent aux mathématiques. »

A côté du mot mesure que nous venons d'expliquer succinctement, nous rencontrons ici celui d' « ordre » qui nous suggère aussitôt l'idée de succession des nombres entiers, de disposition des figures géométriques, d'enchaînement des propositions, etc.

Aussi, *Leibniz* verrait-il à son tour dans les mathématiques la science de l'ordre, lui qui formulait qu'il n'y avait « de mesure que là où il y avait antérieurement de l'ordre ».

D'ailleurs, cette double conception se fait jour déjà chez *Aristote* : « De quoi s'occupent les mathématiques si ce n'est de la proportion et de l'ordre ? » disait-il.

Dans l'*Encyclopédie*, on trouve cette bonne définition de la mathématique par d'*Alembert* : « Science qui a pour objet les propriétés de la grandeur en tant qu'elle est calculable et mesurable. »

Auguste Comte enfin, dans son *Cours de philosophie positive*, déclare : « Le but de cette science est la mesure indirecte des grandeurs et on s'y propose constamment de déterminer les grandeurs les unes par les autres d'après les relations précises qui existent entre elles. »

Pour saisir la nuance que cet adjectif « indirecte » apporte à l'idée de mesure, il faut nous pénétrer de la philosophie mathématique de *Comte*. Pour lui, en effet, la mathématique n'est pas une science essentiellement abstraite, sans contact possible avec le monde des phénomènes, mais bien plutôt une science d'application constante, dont l'objet capital serait la détermination des lois des phénomènes physiques supposées exister *a priori*. C'est ainsi qu'il dira : « L'esprit mathématique consiste à regarder toujours comme liées entre elles, toutes les quantités que peut présenter un phénomène quelconque, dans la vue de les déduire les unes des autres. » Il dira également : « La science mathématique est bien moins importante par les connaissances, très réelles et très précieuses néanmoins, qui la composent directement, que

Hosted by Google

comme constituant l'instrument le plus puissant que l'esprit humain puisse employer dans la recherche des lois des phénomènes naturels. » En conséquence, la relation géométrique qui existe entre les trois côtés d'un triangle rectangle, par exemple, n'aura d'intérêt aux yeux de *Comte* que parce qu'elle permettra, à propos d'un pareil triangle envisagé dans la nature, en arpentage pour fixer les idées, de calculer l'hypoténuse quand on connaît les mesures des deux côtés de l'angle droit sans qu'il soit nécessaire d'effectuer sa mesure directe sur le terrain. Ou encore, lui qui voyait des « courbes réalisées dans la nature », telles par exemple les courbes idéales, trajectoires des centres des planètes, et qui seraient des ellipses d'après les lois hypothétiques de *Képler*, ne s'inquiétera pas de leur vérité géométrique plus ou moins approximative et envisagera l'étude des ellipses comme susceptible d'être appliquée à la mesure, indirecte forcément cette fois, des divers éléments de ces trajectoires, soumis désormais aux relations précises de la géométrie abstraite.

En résumé, en nous plaçant certes à un point de vue plus idéaliste qu'*Auguste Comte*, nous définirons la Mathématique comme la science des grandeurs *abstraites et mesurables*, pures créations de l'esprit, quitte à l'orienter de plus en plus vers l'étude des nombres qui sont justement les mesures de ces grandeurs.

Nous avons souvent employé le mot mathématique au singulier pour donner en quelque sorte plus d'unité à cet ensemble de sciences pures qui ont nom : arithmétique, algèbre, analyse infinitésimale, géométrie, et qui relèvent, de près ou de loin, de cette étude générale des grandeurs. De fait, l'expression : la Mathématique, est redevenue courante. *Auguste Comte* l'avait mise en pratique et, avant lui, le marquis de Condorcet, le philosophe mathématicien qui écrivit sous la Révolution son *Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain*, l'avait proposée à l'exemple des Anciens. Les Anciens, en effet, ont dit μάθησις, mot qu'on retrouve traduit par *mathesis*, dans les textes latins du XVIII^e^ siècle, par exemple.

Hosted by Google

Tentons également de différencier les sciences mathématiques pures.

Pour la géométrie — et si nous commençons par elle, c'est affaire de commodité simplement — il n'y a pas de difficulté. Elle se met nettement à part et se définit par l'étude des propriétés des figures idéales de l'espace, ce dernier pouvant être considéré si on veut comme une forme *a priori* de l'entendement, ainsi que dirait un *Kant* qui serait franchement idéaliste. Quoi qu'il en soit de cette conception spatiale, les figures géométriques n'en sont pas moins, de nos jours, des créations de pensée, de purs êtres de raison et nous sommes loin de la géométrie concrète de jadis, ou, selon l'expression d'*Auguste Comte*, de la « géométrie des Egyptiens ».

Au point de vue étymologique le mot grec γεωμετρία vient de γῆ, terre, et de μέτρον, mesure.

Au point de vue historique, la géométrie serait excessivement ancienne, presque autant sans doute que l'arithmétique. Des recherches récentes montrent que les notions géométriques des peuples primitifs n'étaient pas si restreintes qu'on l'avait cru auparavant et révèlent une sorte de géométrie « préhistorique » (1). L'historien Hérodote (v^e^ siècle avant J.-C.) faisait naître cette science en Egypte et *Proclus* (v^e^ siècle après J.-C.) observait à ce propos que l'arpentage des terrains était, dans ce pays, nécessité par les crues du Nil qui en effaçait périodiquement les limites. Du reste, la découverte du « manuel du calculateur égyptien », le plus ancien texte mathématique connu, avons-nous dit, consolide après coup cette tradition. Chez les Grecs la géométrie va devenir nettement abstraite. En effet, après que vers l'an 600 avant Jésus-Christ, Thalès, le philosophe géomètre de Milet, puis au vi^e^ siècle, l'illustre *Pythagore*, l'eurent introduite d'Egypte, l'un en Grèce de l'Asie Mineure, l'autre en Grèce de Sicile, elle se constitue en science spéculative, vraiment apodictique, tandis que se développe, en tant que science pratique

(1) Voir l'*Histoire des mathématiques* de *Zeuthen*.

Hosted by Google

correspondante, la géodésie, en grec γεωδαισία. Faut-il dans ce but signaler une fois encore les *Eléments* d'*Euclide*, le livre scientifique qui a eu peut-être le plus de renommée et qui sert de modèle même à l'heure actuelle ? Et *Archimède* et **Apollonius de Perge** ne s'occupèrent-ils pas, au IIIe siècle avant Jésus-Christ, de géométrie purement abstraite et même de haute géométrie ?

Sans trop insister sur le développement historique de la science géométrique, citons au passage un ouvrage, assez grossier à la vérité, où l'influence euclidienne est manifeste, l'*Ars geometria*, attribué à Boèce, le philosophe latin et commentateur d'*Aristote*, que l'on considère comme le premier en date (500 ans après J.-C.) des philosophes du Moyen âge. Nous devrons attendre ensuite le XVIIe siècle pour voir refleurir, avec **Desargues** et *Pascal*, la géométrie théorique des Grecs et naître ce qu'on appelle de nos jours la *Géométrie supérieure*. Dans les œuvres du premier qu'on a réunies sous le titre d'*Œuvres de Desargues* se rencontrent quelques idées originales, par exemple : deux droites parallèles seront considérées comme deux droites concourant à l'infini ; la droite et le cercle seront deux espèces d'un même genre. *Descartes*, dont il était l'ami, faisant allusion à sa méthode générale de traiter en même temps plusieurs cas analogues, écrit qu'elle semble être prise de ce que lui-même a coutume d'appeler la « métaphysique de la géométrie ».

Quant à *Pascal* géomètre, nous en avons parlé, dès la première leçon. Ajoutons ici que son *Traité de sections coniques* paraît avoir été inspiré par *Desargues*.

Tentons maintenant de caractériser l'arithmétique. Si les nombres positifs, négatifs et complexes n'existaient pas, comme au temps des Grecs, il n'y aurait pas de difficulté, tout comme il n'en existe pas pour caractériser la géométrie. Il suffirait de dire que c'est la science des nombres, de leurs opérations, de leur calcul en un mot. Mais il en va autrement aujourd'hui où l'étude des nombres s'étend, en algèbre, à celle des nombres en question. Il y a plus : le calcul algébrique qui a longtemps évoqué l'idée d'opérations systématiques à effectuer sur des nombres représentés,

Hosted by Google

les uns par des chiffres, les autres par des lettres dont quelques-unes peuvent être des « inconnues », qui fait songer aux « formules », aux « équations » et même aux « fonctions », ce calcul se présente déjà en arithmétique. Et en effet, ne sait-on pas qu'à l'heure présente l'emploi des lettres est devenu courant en arithmétique ; ne sait-on pas qu'on y résout des équations qui, bien entendu, sont le plus souvent, à solutions entières ? Enfin l'on commence même à y considérer des fonctions prenant une infinité de valeurs entières, qui sont à la vérité des fonctions essentiellement discontinues et qu'on appelle « fonctions arithmétiques ». Du reste dans les *Livres d'arithmétique* de *Diophante* que nous avons eu l'occasion de citer antérieurement, on trouve le calcul algébrique, le traitement de certaines équations où l'inconnue était seule littérale, il est vrai. Pourtant *Diophante* ne connaissait pas, à la fin du IV^e^ siècle de notre ère, les nombres positifs et négatifs qui n'apparaissent véritablement qu'au VII^e^ siècle, avec les Hindous. Encore plus ignorait-il l'usage des lettres pour représenter les nombres connus que va introduire en 1600, le célèbre *Viète*, apportant ainsi un degré d'abstraction considérable, sinon définitif, au calcul en général. Celui-ci ne deviendra complètement général que lorsque, d'abord une lettre désignera un nombre rationnel, de signe quelconque, — contribution qu'on a attribuée à tort à *Descartes*, mais qui lui est postérieure —, et ensuite un nombre irrationnel quelconque. La tradition regarde cependant *Diophante* comme le créateur de l'algèbre ancienne et *Viète* comme celui de l'algèbre moderne.

On voit dès lors ce qu'une pareille affirmation présente de vague tant qu'on n'aura pas défini nettement l'algèbre. *Auguste Comte* y a-t-il réussi quand il a écrit : « L'algèbre est le calcul des fonctions, l'arithmétique celui des valeurs », entendant par là que la première s'occuperait des opérations abstraites, des relations générales entre des nombres variables, et la deuxième des applications numériques au moyen de nombres fixes ? On ne peut guère le penser, car ce serait limiter ainsi l'algèbre à la *Théorie des fonctions*, qui ne peut en être qu'une partie, et étendre au

Hosted by Google

contraire l'arithmétique au traitement de certaines valeurs numériques, telles seraient les valeurs complexes, qui peuvent ne pas être de son ressort.

A plus forte raison la science algébrique ne nous sera point clairement caractérisée par cette curieuse phrase de *Taine* : « Les formules d'algèbre, dans leur étroite enceinte, contiennent toute la courbe dont elles sont la loi ». Cette phrase fait allusion en tout cas à ce qu'une fonction, au sens élémentaire du mot, correspond à une expression algébrique ou formule, par exemple la fonction : $y = 2x + 3$, où x est la variable indépendante, et à ce que la représentation graphique d'une fonction se réalise en traçant une courbe géométrique, ici une droite. Peut-être *Taine*, en l'écrivant, songeait-il à *Fermat* qui, au sujet de la formule précédente que nous nommons l'équation de la droite, aurait parlé de la propriété spécifique « *proprietatis specifica* » de la droite en question ?

Or la représentation graphique des fonctions fait déjà partie de la géométrie analytique, à la constitution de laquelle du reste *Fermat* a largement contribué.

Si donc — et bien que la tentative soit risquée —, nous voulions définir malgré tout l'arithmétique et l'algèbre, si voisines, nous énoncerions en nous rapportant à leurs fondements : l'arithmétique est la science des nombres arithmétiques, l'algèbre la science des nombres algébriques, ou selon l'expression récente, qualifiés.

Il n'est pas jusqu'à l'étymologie du mot algèbre, qui n'ait soulevé quelques controverses. Selon l'opinion la plus accréditée il contracterait l'expression arabe : *al jebr wal moukâbala*, dans laquelle — jebr — signifie restitution, et — moukâbala — opposition. Les Arabes, qui ont emprunté leurs procédés algébriques à *Diophante*, auraient choisi cette locution pour rappeler les deux opérations fondamentales du traitement des équations. La première consiste à supprimer un terme dans l'un des membres quitte à le restituer dans l'autre, une fois son signe changé. La deuxième consiste à réduire les termes semblables une fois oppo-

Hosted by Google

sés les uns aux autres dans les deux membres. Au reste, *algebrista* veut dire chirurgien, en espagnol et en portugais.

Heureusement l'étymologie du mot arithmétique est plus sûre. Ce mot, ἀριθμητική en grec, dérive de ἀριθμός qui signifie nombre et que *Diophante* employait pour symboliser l'*inconnue*, le nombre par excellence de ses équations ou de ses problèmes. Il fut créé, au v^e^ siècle avant notre ère, par les pythagoriciens qui lui faisaient désigner la science théorique des nombres, par opposition à la *Logistique* qui désignait la science d'application, à savoir le calcul pratique. D'ailleurs λογιστική signifie calcul.

Le mot de logistique, lui, a eu une fortune bizarre.

D'abord *Viète*, rejetant le mot « barbare » d'algèbre, le reprendra, avec un sens différent. Il distinguera la « *logistica numerosa* », où seul le nombre inconnu est représenté par une lettre, et qui est, en somme, la soi-disant algèbre de *Diophante*, et ensuite la « *logistica speciosa* », ou « algèbre formelle », les nombres connus, différents des chiffres, étant à leur tour remplacés par des lettres, et qui est sa vraie invention. Puis ce mot signifiera : calcul logarithmique, et enfin il désigne actuellement une logique quintessenciée, de forme algébrique (on la nomme aussi *Algèbre logique*), et qui continue le « calcul logique » de *Leibniz*. Les traités de logistique grecque paraissent tous perdus, sauf un papyrus découvert il y a quelque quinze ans dans la nécropole d'*Akmin*, conservé au musée d'antiquités égyptiennes de Gizèh (près du Caire), et représentant l'arithmétique pratique chez les Grecs, d'après la tradition égyptienne. Par contre il nous reste, pour la première école d'Alexandrie, avant notre ère, quelques chapitres d'arithmétique pure parmi les *Éléments* d'*Euclide*, et pour la deuxième école alexandrine, au commencement de notre ère, l'Ἀριθμητικὴ εἰσαγωγὴ ou *Introduction arithmétique* de Nicomaque, ainsi que les six livres d'arithmétique algébrique de *Diophante*. Du reste *Nicomaque* fut, au I^er^ siècle, un arithméticien émérite, qui eut plus tard avec *Euclide* les honneurs de la traduction, que *Boèce* en particulier fit connaître au Moyen âge. Il a été de mode de dire, pour rappeler son talent : « Tu calcules comme *Nicomaque* ».

Hosted by Google

Un autre mot, de fortune aussi diverse que celui de logistique et d'étymologie aussi controversée que celui d'algèbre est le mot mathématique d'*algorithme*. Il proviendrait encore de l'arabe et se découvrirait dans le nom d'un mathématicien du IXe siècle, MOHAMMED AL KHARIZMI (1), célèbre par son traité d'algèbre-arithmétique, le plus ancien traité arabe connu, et connu déjà par l'Occident latin, au Moyen âge. A cette époque « algorithmus » désigne le système de numération rattaché à ce qu'on appelle le « principe de position » d'après lequel, dans un nombre écrit en chiffres, tout chiffre placé à la gauche d'un autre représente des unités dix fois plus grandes, c'est-à-dire désigne en somme l'arithmétique pratique avec les chiffres arabes. Aujourd'hui algorithme signifie tantôt une notation particulière, tantôt un ensemble de signes et de lettres tenant la place d'une série d'opérations à effectuer sur des nombres donnés pour en trouver de nouveaux. Par exemple, le classique algorithme du calcul différentiel de *Leibniz*, indiquant la façon de former la dérivée d'une somme ou d'un produit, ou d'un quotient, et se servant de la notation symbolique de la *dérivée*, $\frac{dy}{dx}$, d'une fonction y de x, où dx et dy sont les *différentielles* de x et de y. Par exemple aussi l'algorithme du plus grand commun diviseur de deux nombres entiers qui utilise des restes de divisions successives, comme on se souvient. Enfin on remplace quelquefois la dénomination d' « algèbre logique » par celle de « logique algorithmique ». D'un autre côté certains auteurs allemands emploient le terme d' « algorithmie » pour désigner la science des nombres en général, tant arithmétique qu'algébrique : mais alors il provient manifestement de ἀριθμός, nombre.

Venons-en à l'analyse infinitésimale, cette fois. Nous la définirons sans peine comme s'occupant fondamentalement des infiniment petits — nous avons appris à les connaître —, de leurs rapports, à propos du calcul des dérivées ou calcul différentiel, de

(1) Orthographe peu certaine, on trouve encore celles-ci : *Alkhovarizmî* ou *Alkhwarizmî* ou *Alkhovaresmi*.

Hosted by Google

leur somme en nombre infini, à propos du calcul intégral. C'est le plus puissant instrument dont disposent les mathématiques modernes. On pourrait à la rigueur, a-t-on dit, pressentir cette analyse chez *Archimède*, au IIIe siècle avant Jésus-Christ (— 287 environ, — 212), au sujet de ses quadratures. La découverte (1) faite il y a quelques mois, à Constantinople, d'un de ses traités inédits, intitulé : *De la méthode*, confirme hautement cette façon de voir. Mais l'analyse infinitésimale s'édifiera solidement au XVIIe siècle, l'âge d'or de la mathématique et de la philosophie, avec en particulier *Fermat* et sa méthode *De maximis et minimis* qui sert à trouver les tangentes aux courbes, avec surtout *Leibniz* et sa *Nova methodus pro maximis et minimis*, et avec *Newton* et sa *Methodus fluxionarum*. Nous reviendrons plus tard sur l'histoire du calcul infinitésimal, sur le débat de priorité dans cette invention entre les deux derniers auteurs, signalons seulement pour à présent que le mot de « fonction » au sens élémentaire actuel, *Leibniz* l'emploie pour la première fois à la fin du XVIIe siècle. Le premier traité didactique sur cette branche mathématique, a-t-on dit encore, est l'*Analyse des infiniment petits*, du marquis de *l'Hôpital*, un disciple scientifique de *Leibniz*.

Quant à l'Arithmétique géométrique, c'est l'étude simultanée de l'arithmétique et de la géométrie, l'application du calcul arithmétique à la grandeur géométrique, ou inversement l'établissement d'opérations arithmétiques par l'emploi des grandeurs. En thèse générale, on peut dire que la géométrie ne peut guère se passer de l'arithmétique, qu'elle est soumise au nombre, mais l'inverse, surtout de nos jours, est loin d'être vrai. Aussi l' « application de la quantité à la géométrie », comme on dit philosophiquement, date de fort loin, et les deux sciences vont-elles de pair dès la plus haute antiquité.

Déjà le manuel d'*Ahmès* nous en fournit le témoignage, bien que le calcul y prédomine. Mais les *Eléments* euclidiens, où

(1) L'ouvrage adressé à l'arithméticien et astronome *Eratosthène* était conservé dans un palimpseste, c'est-à-dire dans un manuscrit dont on avait effacé la première écriture pour écrire à nouveau.

Hosted by Google

l'étude des propriétés des nombres arithmétiques emploie abondamment l'appareil géométrique, en sont l'exemple le plus frappant. Au surplus, avant *Euclide*, les pythagoriciens et *Platon* lui-même avaient envisagé ce qu'on a appelé les *nombres plans*, soit les triangulaires, soit les polygonaux, et les *nombres solides*, pyramidaux entre autres, et qui leur apparaissaient comme un ensemble d'unités concrétisées, qu'on disposait sous forme de figures géométriques. Il existe même un opuscule d'un traducteur des Grecs, intitulé : *Sur les nombres polygones* dont l'original est attribué à *Diophante*. Enfin le célèbre **Léonard de Pise**, qui fit connaître à la race latine du XIII^e^ siècle la science mathématique des Arabes d'Orient, en particulier les chiffres arabes (ou indiens, d'après lui) montre précisément dans son *Liber abaci*, ou livre de l'arithmétique, comment l'arithmétique (qu'il préférera dénommer algèbre) et la géométrie s'entr'aident mutuellement.

D'une façon analogue, la géométrie analytique est l'étude simultanée de l'algèbre et de la géométrie, l'application des calculs algébriques en général (ou analytiques dira-t-on avec le même sens) à la recherche de la forme des courbes, de leurs positions relatives, l'illustration graphique des équations. Son invention, les historiens des mathématiques l'accordent en partie double à *Fermat* et à *Descartes*. Bien que la conception du premier soit peut-être plus nette, elle est restée plus longtemps ignorée, et l'on cite surtout la *Géométrie* du second, comme l'ouvrage fondamental, créateur de cette science. On rencontre dans cet ouvrage les *axes de coordonnées* auxquels on rapporte une courbe définie par son équation analytique, et l'expression de « coordonnées cartésiennes » est désormais reçue. Mais le germe de la science, sinon dans sa forme du moins dans son esprit, se trouve déjà déposé 2000 ans avant le XVII^e^ siècle chez les géomètres grecs, en particulier chez l'auteur du traité des *Coniques*, *Apollonius de Perge,* à qui les Grecs ont décerné le titre de « grand géomètre ». Aussi faudra-t-il, dans le débat métaphysique fameux entre les partisans et les adversaires de la « quan-

Hosted by Google

tité » et de la « qualité », se garder d'une opinion toute faite, soutenant d'une part que *Descartes* a créé la géométrie analytique (1) et d'autre part, qu'en créant cette géométrie il a substitué la « quantité à la forme » : en d'autres termes qu'il a soumis les figures de la géométrie aux nombres, arithmétiques et qualifiés.

Mais je me hâte, pour terminer, de profiter de ce rapprochement fortuit entre deux époques, en vous signalant une belle et très juste pensée de *Renan* : « Il y a un miracle dans l'histoire, c'est la Grèce antique », à laquelle je me permettrai d'ajouter un complément, que justifieront les grands noms des *Viète*, des *Bacon*, des *Képler*, des *Descartes*, des *Fermat*, des *Pascal*, *Leibniz*, *Newton*, *Malebranche*, *Spinoza*, *Fontenelle* : il y a, dans l'histoire de la philosophie et de la mathématique un siècle miraculeux, c'est le XVII^e^ siècle.

---

(1) On pourrait remplacer sans inconvénient cette dénomination par celle « d'algèbre géométrique » à laquelle on fait désigner, un peu abusivement, l'arithmétique géométrique.

Hosted by Google

QUATORZIÈME LEÇON

(Suite de la précédente.)

La dernière fois, nous nous sommes occupés des sciences mathématiques fondamentales. Nous signalerons en commençant, aujourd'hui, pour n'y plus revenir, deux autres branches, théoriques également : la *Trigonométrie* et la *Géométrie descriptive*, et même nous dirons quelques mots de la *Mécanique rationnelle*, science de plus en plus mathématique à cause de son degré d'abstraction de plus en plus prononcé.

La trigonométrie, étymologiquement mesure des triangles, est essentiellement l'étude des triangles par le calcul algébrique. Elle aurait pris naissance, sous une forme encore grossière, avec les astronomes alexandrins HIPPARQUE, 150 ans avant Jésus-Christ et PTOLÉMÉE, 150 ans après Jésus-Christ. *Claude Ptolémée* surtout mérite d'arrêter notre attention. Ses connaissances mathématiques, parmi son savoir encyclopédique scientifique, étaient fort étendues. Ainsi le témoigne son plus important ouvrage *Composition mathématique*, devenu classique par la suite sous le nom d'*Almageste* que lui donnèrent les Arabes et qui signifie : le majestueux. On connaît son théorème : « Dans un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés », théorème qui se trouve sous un cas particulier de figure dans son *Almageste*. Enfin, on voit en lui un précurseur de *Descartes*, en ce sens qu'il considéra trois axes rectangulaires (*Descartes*, en géométrie plane, n'en considérait que deux, rectangulaires ou obliques) pour déterminer la position d'un point de l'espace. Puis au XV^e^ siècle, la trigonométrie moderne se constitue avec

Hosted by Google

Regiomontanus, savant allemand, de son vrai nom Jean Muller, traducteur et commentateur des œuvres des Grecs.

La géométrie descriptive est une sorte de géométrie en partie double. Elle a pour objet de représenter les figures géométriques de l'espace par leurs « projections » sur deux plans rectangulaires. Ces projections servent en quelque sorte d'images à la figure.

Elle fut créée, systématisée tout au moins, par le mathématicien Gaspard Monge — on se rappelle son rôle sous la Révolution —, qui fit partie de la mission scientifique chargée d'accompagner Bonaparte en Egypte et qui fonda l'Ecole polytechnique. *Monge*, dont le souci constant fut d'allier l'algèbre, la haute analyse même, à la géométrie, compare dans la préface de son livre *Géométrie descriptive* la nouvelle science à l'algèbre. « Il serait à désirer, dit-il, que ces deux sciences fussent cultivées ensemble. La géométrie descriptive porterait dans les opérations analytiques les plus compliquées l'évidence qui est son caractère, et à son tour l'Analyse porterait dans la géométrie la généralité qui lui est propre. » Ce livre renferme au demeurant des questions de géométrie supérieure proprement dite. Signalons également que *Desargues* — nous en parlions la dernière fois — a été surnommé, eu égard à certains de ses travaux, « le Monge de son temps ».

Quant à la mécanique rationnelle, du grec μηχανή, machine, c'est l'étude géométrique et surtout algébrique des corps en mouvement ou au repos, en faisant intervenir deux notions nouvelles celles du *temps* et de la *force*, ou, ce qui revient au même, de la *masse*. Mais — et le correctif : rationnel, l'indique suffisamment — ces notions doivent s'entendre comme étant purement subjectives, et les corps en mouvement ou au repos comme étant de purs êtres de raison, qui ne trouvent dans les corps de la nature qu'une image plus ou moins lointaine. Les origines de la mécanique, sous sa forme concrète, sont excessivement anciennes, les peuples, dès l'âge historique tout au moins, sentant le besoin de s'industrier, de se servir de machines. *Aristote*, avec ses *Questions mécaniques* et sa *Physique*, trop erronées avons-nous dit, est déjà un des fon-

Hosted by Google

dateurs. Mais il faudra attendre le IIIe siècle d'avant notre ère, pour que cette science devienne vraiment apodictique, avec *Archimède*. Le savant de Syracuse étudia en effet, en mécanique, la théorie du levier et s'occupa des centres de gravité — et ici ses raisonnements font pressentir le calcul intégral. — Au IVe siècle de notre ère, le géomètre alexandrin *Pappus*, qui commenta ses prédécesseurs, et dont nous avons cité l'ouvrage : *Collections mathématiques*, énonce certains théorèmes relatifs aux centres de gravité, connus aujourd'hui sous le nom de théorèmes de Guldin, parce que ce dernier les reprit au XVIIe siècle. Au XVIIe siècle également, GALILÉE, le célèbre astronome et physicien, versé aussi dans les mathématiques, détermine la trajectoire parabolique des mobiles, et le mathématicien et physicien HUYGENS s'occupe du mouvement des corps solides en général, et publie son traité de l'horloge : *Horologium oscillatorium*.

Il n'est pas jusqu'aux philosophes même, *Descartes* et *Leibniz* entre autres, qui ne se soient occupés de questions de mécanique, pour tenter d'expliquer la formation de l'univers, la constitution de la matière. Il conviendra de rappeler à ce propos les deux systèmes philosophiques bien connus, sinon clairement spécifiés : le *mécanisme* et le *dynamisme*. Aux yeux de *Descartes*, tout est mécanisme dans les corps, mais tout est pensée dans les esprits. Vous vous rappelez combien il donne d'importance à la « matière étendue » et encore au concept de mouvement. On lui prête, sans doute généreusement, la phrase suivante : « Donnez-moi l'étendue et le mouvement, et je vais faire le monde. » Quoi qu'il en soit, cette phrase que *d'Alembert* a contribué pour une large part à répandre, résume sinon dans sa forme, un peu trop catégorique pour *Descartes*, du moins par le fond la doctrine du philosophe « mécaniste ». Elle nous remet en mémoire, d'ailleurs, la phrase légendaire d'*Archimède* : « Donnez-moi un point d'appui et je soulèverai le monde. » Enfin *Descartes* s'occupe, sans grande rigueur à la vérité, de la *loi des quantités de mouvement*. C'est Dieu, d'après lui, qui aurait mis dans les corps une quantité de mouvement (produit de la masse par la vitesse) constante.

Hosted by Google

Le « dynamiste » *Leibniz*, à qui l'étendue ne suffit plus, pour les substances, qui fait plus volontiers intervenir l'*effort*, c'est-à-dire la force, dont la conception métaphysique de la « puissance » continue celle d'*Anaxagore* et surtout celle d'*Aristote*, formule à son tour la *loi des forces vives*.

Cette loi se rapproche d'une manière très satisfaisante de notre loi actuelle de *la conservation de l'énergie*. Il ne sera pas superflu d'ajouter que s'il considéra ce qu'il appelait la « quantité d'action motrice » ou force vive (produit de la masse par le carré de la vitesse), *Huygens*, son véritable éducateur mathématique, le précéda dans la loi en question.

Sous sa forme moderne, la mécanique rationnelle et méritant ce nom le mieux possible, a emprunté les secours de l'analyse transcendante. Au point de vue historique, elle se constitue dès le XVIII^e^ siècle, avec les *Bernoulli*, avec *Euler*, *d'Alembert*, *Lagrange*, *Laplace*, POINSOT, etc... Au point de vue critique, si elle est devenue de plus en plus tributaire de la méthode déductive, elle n'en présente pas moins un certain nombre d'hypothèses primitives qu'on énonce sous forme de lois. Ces hypothèses jouent, si on veut, le rôle de postulats, analogues à ceux de la géométrie. On les pose une fois pour toutes — je ne veux pas dire définitivement — en se laissant guider par l'observation et mieux l'expérimentation du monde phénoménal, en d'autres termes, du monde physique.

Nous en aurons fini avec les diverses branches mathématiques qui vont de l'arithmétique jusqu'à la mécanique rationnelle, quand nous aurons dit qu'à côté de chacune d'elles se place quelque science appliquée correspondante. Indiquons rapidement l'*arpentage*, la *géodésie*, la *stéréotomie* qui relèvent de la géométrie et de la trigonométrie ; l'*arithmétique commerciale* ; le *calcul des probabilités*, entrepris par *Pascal* et *Fermat*, mis au point par *Laplace*, et qui relève de l'analyse supérieure ; la *mécanique céleste* qui relève de la mécanique rationnelle et qui apparaît définitivement dans le *Traité de mécanique céleste* de *Laplace*, qu'on a surnommé le « Newton Français ».

Hosted by Google

Enfin, une branche d'application, de création récente et prenant de l'extension de jour en jour, est la *physique mathématique* qui compte parmi ses plus notoires représentants M. *H. Poincaré.*

Certes, loin de notre pensée de faire fi des sciences appliquées, bien que notre intention ne soit pas de les étudier. *Taine* a écrit, peut-être avec trop d'exclusivisme : « L'objet de la science n'est pas la théorie, mais l'application ». De grands esprits n'ont pas dédaigné les applications, voire manuelles. *Pascal* inventa une « machine arithmétique » permettant d'exécuter en quelque sorte mécaniquement, les opérations simples d'addition et de soustraction. Cet instrument se trouve au Conservatoire des Arts et Métiers de Paris. *Leibniz* perfectionna la machine de *Pascal* et construisit une « machine à calculer » permettant de faire en plus, des multiplications, des divisions et même des extractions de racine. On la conserve à la bibliothèque de Hanovre, en même temps que les manuscrits si nombreux du philosophe. On espère du reste utiliser ses manuscrits pour publier bientôt une édition complète de ses œuvres.

Chez les Grecs — nous l'avons signalé — la distinction s'établit déjà entre l'arithmétique pure et la logitisque ou calcul pratique. Dès le début de leur ère scientifique, *Pythagore* distinguait quatre μάθημα, ou sciences qui s'enseignent. « Il y a, d'après lui, quatre degrés de la sagesse : l'Arithmétique, la Musique, la Géométrie, la Sphérique ». Or, la Musique n'était qu'une application de l'arithmétique à l'acoustique : les rapports, les progressions y prenant place. Quant à la Sphérique, à peu près synonyme d'astronomie, c'était l'étude du ciel faite d'après la géométrie de la sphère, du ciel qui, pensait *Platon*, a été « le grand maître de calcul des hommes », et qui, lorsqu'il brille « étoilé au-dessus de nos têtes », était avec « la loi morale au fond de nos cœurs » celle des choses que *Kant* prisait le plus au monde. Pareillement, *Euclide* pour sa *Catoptrique* avait appliqué la géométrie à l'optique. D'ailleurs, ces quatre « mathèmes » constituèrent au XI^e^ siècle, le *quadrivium* des arts libé-

Hosted by Google

raux, faisant pendant au *trivium* qui comprenait à son tour la Grammaire, la Rhétorique et la Dialectique. Ajoutons encore que c'est à ce groupement autrefois classique des quatre sciences en question que *Descartes* fait allusion dans ses *Regulæ*, lorsqu'il parle de la mesure, au sens mathématique du mot, qu'on cherche dans « les nombres, les figures, les astres et les sons ».

Pour les Romains, enfin, la science pure eut peu d'attraits, et Cicéron lui-même nous en avertit dans ses *Tusculanes*. Leur numération, si pénible, est essentiellement dactylique, ce qui fait présumer en d'autres termes qu'ils comptaient habituellement sur leurs doigts. Leur géométrie, assez rudimentaire, se borna à celle de leurs *agrimensores* ou arpenteurs, appelés aussi *gromatici*.

Digression critique et historique.

Nous avons dit que la raison qui faisait reconnaître dans la mécanique rationnelle une science déjà d'ordre mathématique, c'était son degré d'abstraction suffisamment accusé. Nous profiterons de la circonstance pour faire quelques réflexions qui donneront une idée de l'évolution de la pensée mathématique, scientifique plus généralement, au long des périodes intellectuelles successives de l'esprit humain.

Selon *Auguste Comte*, tout concept, ou ensemble de concepts, toute science en un mot, subit, au cours des âges, trois phases d'élaboration. Vous reconnaissez là sa fameuse *loi des trois états*. « Par la nature même de l'esprit humain, dit-il, chaque branche de nos connaissances est assujettie dans sa marche à passer successivement par trois états théoriques différents : l'état *théologique* ou fictif, l'état *métaphysique* ou abstrait, enfin l'état *scientifique* ou positif ». Prenons comme exemple la mécanique et dans la mécanique le concept de la « loi d'inertie ». Cette loi est un postulat — on dit aussi, quoique abusivement : principe fondamental —

Hosted by Google

de la dynamique, qui est la partie de la mécanique où les deux notions nouvelles de temps et de force, proprement mécaniques, entrent en jeu précisément.

Elle énonce qu'un corps matériel, aussi petit qu'on veut, ne peut se mettre de lui-même en mouvement, ou alors s'il est en mouvement, celui-ci est forcément rectiligne et uniforme. Sa conséquence immédiate sera que dans toute autre condition de mouvement, le corps sera « soumis à l'action d'une force ». Et c'est ainsi qu'on caractérise la force.

Eh bien, pour la science mécanique dans son ensemble, il est permis de penser que les premières explications que le cerveau humain a fournies, par exemple pour rendre compte mécaniquement de l'existence de l'univers, ou du mouvement de la matière, étaient purement théologiques. Telles ont dû être les explications des anciens prêtres égyptiens sur lesquels les documents nous manquent, mais dont nous savons qu'ils élaborèrent peut-être les premiers rudiments scientifiques qui aient jamais existé. Puis avec les penseurs grecs la mécanique rentre insensiblement dans la phase métaphysique. Qu'il nous suffise de citer à nouveau l'antique *Anaxagore* et son principe intelligent, le νοῦς, qui est également un principe de mouvement, une sorte de force par conséquent, selon le mot moderne. Aussi considère-t-on ce philosophe comme le véritable précurseur du dynamisme (de δύναμις, force, puissance). Du reste une preuve qu'avec *Anaxagore* la pensée scientifique, pour ainsi parler, a dépassé sa phase théologique et est entrée au moins dans sa phase métaphysique, c'est sa mise en captivité par le gouvernement athénien, lui reprochant ses explications raisonnées de phénomènes (par exemple les éclipses de lune) qu'on croyait être l'objet de l'intervention divine.

Enfin, sans attendre les temps modernes, la mécanique prend son troisième état, vraiment scientifique, avec *Archimède*.

Passons à la loi d'inertie. *Comte*, qui attribue cette loi à *Képler*, aurait eu beau jeu pour en rencontrer les deux phases théologique et métaphysique, la phase théologique surtout, chez cet

Hosted by Google

astronome-théologien, lequel, vous vous le rappelez, se faisait fort d'expliquer la création divine de l'univers au moyen des cinq polyèdres réguliers de la géométrie !

En tout cas la phase métaphysique suit rapidement et se présente avec *Descartes* et, un siècle plus tard, avec *Euler*, affirmant l'un et l'autre la loi d'inertie au nom de la logique, de la métaphysique tout au moins. *Descartes*, dans son écrit intitulé *Le Monde* ou *Traité de la lumière*, revient à diverses reprises sur cette idée qu'un corps a tendance à se mouvoir en ligne droite ; que s'il n'a pas toujours un mouvement rectiligne c'est qu'il en est empêché par les corps voisins. A propos du mouvement d'une partie de la matière, qu'il met en parallèle avec les autres parties, il dit textuellement ceci : « Si elle a une fois commencé à se mouvoir, elle continuera toujours avec une égale force jusques à ce que les autres l'arrêtent ou la retardent. » Laissons *Descartes* et son mécanisme, et adressons-nous maintenant à *Euler*, auteur du premier ouvrage didactique où le calcul infinitésimal sert d'auxiliaire à la mécanique et qui s'intitule *Mechanica*. « On ne saurait concevoir, pense-t-il, pourquoi le corps se détournerait de sa route d'un côté plutôt que d'un autre ; donc puisque rien n'arrive sans raison, — ne croirait-on pas avoir affaire à *Leibniz* ? — il s'ensuit que le corps en question conservera toujours la même direction. »

Pour la phase scientifique, la trouverons-nous, un second siècle plus tard, chez *Comte* lui-même ? Il combattait l'explication métaphysique de la loi d'inertie au nom de l'expérience. « Elle ne saurait avoir de réalité, lit-on dans le *Cours de philosophie positive*, qu'autant qu'on la conçoit comme basée sur l'observation. Mais sous ce point de vue l'exactitude est évidente d'après les faits les plus communs. Il n'y a pour ainsi dire aucun phénomène de la nature qui ne puisse nous fournir une vérification sensible de cette loi, sur laquelle est en particulier fondée toute l'économie de l'univers. »

Certes, cette dernière explication de la loi actuelle est trop tranchante pour nous convaincre, et elle sent trop l'empirisme pour

Hosted by Google

nous satisfaire. D'ailleurs ce qu'on a nommé le *phénoménisme* de *Comte* doit être regardé comme sujet à caution, à cause de son caractère, systématique à l'excès : nous avons eu l'occasion de nous en douter.

Il serait presque à désirer que dans la circonstance, notre philosophe, qui manifestait trop d'antipathie vis-à-vis de la métaphysique pour s'en tenir aux deux premiers états de sa loi, en ait imaginé un quatrième qu'il aurait pu appeler « critique », et qui caractériserait assez bien la science actuelle.

En nous plaçant à ce nouveau point de vue (ce serait au fond celui d'un métaphysicien averti, à l'esprit nettement mathématique), nous dirons que la loi d'inertie doit être acceptée uniquement comme un postulat de mécanique rationnelle, comme une hypothèse admise par convention, si on préfère. La force, elle, étant considérée dès que le mouvement cesse d'être rectiligne ou uniforme, et cela par définition, par caractérisation plutôt.

Ajoutons au demeurant que *Newton*, au lieu de s'occuper théologiquement, en tout cas métaphysiquement, comme l'avaient si souvent fait les Anciens, de la nature de la force, pose en principe en tête de ses *Principia* la loi d'inertie, ce qui lui permettra par la suite d'appliquer les mathématiques à l'étude des phénomènes de la nature. « Tout corps mis en mouvement par une première impulsion continuerait à se mouvoir indéfiniment en ligne droite si aucune autre force ne venait à le faire changer de direction », a-t-il écrit.

Enfin *Huygens*, désigné admirativement par *Newton* sous l'épithète de *summus Hugenius,* avait lui-même, quelques années auparavant, formulé le plus nettement de tous : « Tout corps, une fois mis en mouvement, doit, si aucun obstacle ne s'y oppose, continuer à se mouvoir perpétuellement avec la même vitesse et suivant une ligne droite. »

Pour terminer cette leçon dans l'ordre d'idées ci-dessus, encore un mot de critique contre ce qu'on a appelé le « fétichisme mathématique » et qui me paraît si nettement se révéler dans

Hosted by Google

cette prétention de *Spinoza* déclarant, dans son chapitre des *Passions* : « J'analyserai les actions et les appétits des hommes, comme s'il était question de lignes, de plans et de solides ». Il ne faudrait pas croire en effet que les sciences mathématiques fondamentales qu'on déclare *sciences exactes*, soient exactes par elles-mêmes d'une façon absolue, indépendamment de l'esprit humain. Il suffit pour se rendre compte qu'il n'en va pas ainsi, de songer aux géométries non-euclidiennes, faisant apparaître désormais le postulatum d'*Euclide*, comme admis à la façon d'un article de foi, par l'effet d'une libre convention scientifique. Mais c'est surtout lorsque, en se proposant de concilier la théorie et la pratique, l'on veut condenser sous une forme abstraite et mathématique, tel ou tel phénomène du monde physique, que l'exactitude risque de n'être plus complète. On se gardera donc de croire, comme le voulaient les pythagoriciens, que « toute chose est nombre ». Il sera plus exact à la vérité de soutenir que le concept du nombre est simplement utile en lui-même mais non indispensable ; en tout cas que le nombre ne constitue pas une propriété intrinsèque d'une chose, mais une pure abstraction de l'esprit ; et il est bien plutôt une véritable convention pour représenter, si on veut, un objet du monde extérieur, mais sous un certain rapport métaphysique, celui de la quantité. De même, si sous l'influence de la philosophie de *Descartes* et de celle de *Leibniz* on formulait, tantôt : « toute chose est étendue, toute chose est mouvement », tantôt : « toute chose est force », ou encore, si on acceptait à la lettre la maxime de *d'Alembert* : « le monde est un problème de mécanique », risquerait-on d'outrepasser la vérité formelle. De même encore, si à la suite de l'engouement produit par les lois astronomiques de *Képler*, par la loi de la gravitation universelle de *Newton* — à propos de ses *Principia*, *Fontenelle* disait que c'était « peut-être le plus grand effort de la pensée humaine » et *Lagrange* confessait que c'était « la plus haute production de l'esprit humain » —, si à la suite des idées d'*Auguste Comte* sur l'adaptation parfaite de l'analyse mathématique aux phénomènes physiques, on croyait

Hosted by Google

traduire l'univers en formules ou en équations, on se ferait étrangement illusion.

De même enfin il serait tout à fait déraisonnable d'accorder quelque crédit à cette loi physiologique, de tournure mathématique, savoir : « l'intensité de la sensation croît comme le logarithme de l'excitation », et qui porte le nom de « loi de Fechner », en raison de ce que ce philosophe allemand du siècle passé, au système à la fois idéaliste et matérialiste, dont l'effort fut de ramener la psychologie à la science des faits internes, tant moraux que physiologiques, accueillit avec complaisance certains résultats d'observation et d'expérimentation d'un de ses contemporains, l'anatomiste allemand Weber. Comme si l'on pouvait parler de l'égalité et de l'addition des sensations, et mettre de pareilles grandeurs psycho-physiques au rang des grandeurs mathématiques !

Le célèbre auteur de l'*Avenir de la science*, *Renan*, historien, philologue et philosophe moraliste initié aux méthodes des sciences de la nature, a vu plus juste quand il écrivait, vers la fin du XIXe siècle : « Les mathématiques ne fournissent pas de lois de la nature ; mais (ajoutait-il, peut-être avec trop de confiance dans leur pouvoir) en donnant d'admirables formules pour exprimer les transformations de la quantité, elles servent à faire sortir des lois de la nature tout ce qu'elles contiennent. »

Aussi, si l'on veut tenir un juste milieu entre le dogmatisme outrancier et le scepticisme impuissant, sera-t-il raisonnable d'envisager seulement la mathématique, non comme susceptible de représenter le monde sensible en essence et formellement, mais bien comme un puissant moyen d'investigation pour les diverses catégories de la connaissance qu'il peut nous fournir.

Hosted by Google

QUINZIÈME LEÇON

LA MATHÉMATIQUE ET LA PHILOSOPHIE (*Suite et fin.*)

Dans cette leçon, qui terminera notre première partie, il convient de porter une vue d'ensemble sur les notions fondamentales d'analyse mathématique que nous aurons à étudier dans notre deuxième partie, et de sceller également les derniers rapports entre la mathématique et la philosophie.

Nous savons que les sciences mathématiques pures se pénètrent les unes les autres — il n'est plus question désormais des sciences appliquées.

Nous verrons leurs notions fondamentales, celles que nous envisagerons tout au moins, se présenter à nous avec une espèce de complexité croissante. Pourtant, si nous jugeons surtout du point de vue subjectiviste, nous les verrons apparaître comme des *combinaisons* plus ou moins variées, plus ou moins transcendantes, de notions primitives. *Poinsot*, un des créateurs de la mécanique moderne, dont le penchant pour la géométrie plutôt que pour l'algèbre, ou selon ses propres termes, dont le penchant pour la « synthèse » plutôt que pour l' « analyse » l'eût détourné de ce point de vue subjectiviste, déclarait cependant, il y a plus d'un demi-siècle : « En géométrie, comme en algèbre, la plupart des idées différentes ne sont que des transformations ; les plus lumineuses et les plus fécondes sont pour nous celles qui font le mieux image et que l'esprit combine avec le plus de facilité dans le discours et dans le calcul. » Vers la même époque, à propos des fonctions élémentaires, par suite fondamentales, que considère

Hosted by Google

l'algèbre, *Auguste Comte* écrivait : « Comment évaluer une telle fonction qui serait vraiment simple, c'est-à-dire qui ne rentrerait pas dans une combinaison de celles déjà connues ? », et concluait ainsi : « Mais tout bien considéré, je crois qu'il demeure incontestable que le nombre de ces éléments ne peut s'accroître qu'avec une extrême lenteur. »

Or la notion primitive par excellence, vous le savez, est celle du nombre entier, à la base de l'arithmétique d'abord, de toute l'analyse mathématique ensuite.

J'espère qu'à la fin de notre étude en commun vous serez mieux à même de comprendre pourquoi le célèbre *Gauss*, dont la vocation mathématique fut extraordinairement précoce et qui vécut jusque vers le milieu du XIX^e^ siècle, soutenait que l'arithmétique était « la reine des mathématiques », les mathématiques étant déjà « la reine des sciences ».

Du reste, *Théon de Smyrne*, le commentateur mathématique de *Platon*, vous souvient-il, l'avait lui-même appelée la « première des sciences ».

J'espère que vous comprendrez également pourquoi M. *Poincaré* formule d'une façon en apparence paradoxale mais très moderne : « Le nombre entier est le seul objet de la pensée mathématique ». Pourquoi enfin, dans le même esprit, on tend à écarter non seulement la mécanique rationnelle, mais encore la géométrie, du domaine des mathématiques pures, du nombre pur, écartant de la sorte tout autre postulat que le « postulat du nombre entier », pour nous permettre une pareille expression, puisque la définition véritable de ce nombre restant impossible, il est nécessaire de le postuler, qu'on le veuille ou non. Et dire qu'autrefois Géométrie était synonyme de Mathématique !

Mais même dans ce sens limitatif la mathématique n'en demeure pas moins susceptible de progrès, ses premiers principes pourront recevoir une attention de plus en plus fructueuse, ses notions premières renouvelées subir de réels perfectionnements. *Pascal* comparait l'humanité « à un même homme qui subsiste toujours et apprend continuellement », et pour lui « tout

Hosted by Google

ce qui se perfectionne par progrès périt aussi par progrès ». *Poinsot* a émis à son tour : « Gardons-nous de croire qu'une science est faite, quand on l'a réduite à des formules analytiques. Rien ne nous dispense d'étudier les choses en elles-mêmes, et de nous bien rendre compte des idées qui font l'objet de nos spéculations. » Ce conseil, bon nombre de logiciens-mathématiciens le suivent aujourd'hui, quelquefois avec exagération de symbolisme, de « formules analytiques » dirait *Poinsot* ; mais il serait injuste d'oublier que notre époque semble, à ce point de vue de logique mathématique, être une époque d'élaboration. Et à moins de se déclarer satisfait à la manière d'un néophyte, qui sous prétexte que la quadrature du cercle ne peut se réaliser élémentairement, ou qu'il n'existe que cinq espèces de polyèdres réguliers inscriptibles dans la sphère, n'étudierait jamais plus l'aire du cercle, ou l'inscription des polyèdres réguliers, on peut sentir malgré tout le besoin d'une nouvelle initiation mathématique plus rigoureuse et plus logique. Cette initiation, les « arithméticiens » d'à-présent nous la rendent possible et le but de nos leçons à venir, quand nous jugerons du point de vue subjectiviste, que vous savez être le point de vue vraiment rigoureux, sera en partie de vous l'offrir, justement.

Auparavant faisons une dernière fois et selon notre coutume une incursion en partie double dans les domaines de la mathématique et de la philosophie, fondues l'une dans l'autre au temps de *Platon* et qui se rejoignent, à l'heure actuelle, par beaucoup de chemins.

Platon avait le culte de la mathématique. Une de ses maximes consistait à soutenir que « Dieu *géométrise* toujours » : ἀεὶ ὁ θεὸς γεωμετρεῖ. Cette sentence d'ailleurs fut reprise vingt-deux siècles après, par *Gauss*, avec une légère variante : ὁ θεὸς ἀριθμητίζει (1), Dieu *arithmétise*. Le philosophe grec discutait volontiers métaphysiquement des mathématiques. Il accordait plus de crédit à la connaissance qui relève de l'entendement qu'à celle qui relève

(1) Néologisme grec, sous la plume de *Gauss*.

Hosted by Google

des sens, lesquels nous permettraient, par exemple, de voir et de toucher un groupe d'unités concrétisées, représentées par des objets matériels. C'est ainsi que dans un de ses *Dialogues* intitulé *Théétète*, du nom d'un géomètre athénien dont les ouvrages paraissent tous perdus, il fait répliquer à ce dernier : « Je répondrai qu'à l'égard des nombres qu'on voit ou qu'on touche, on peut se tromper et prendre onze pour douze; mais jamais cette confusion n'aura lieu pour les nombres qui ne sont que dans la pensée. » Enfin dans le *Timée* il considère complaisamment les « cinq solides » classiques chez les Anciens, savoir: les cinq polyèdres réguliers inscriptibles dans la sphère, ce qui les a fait appeler les *solides de Platon* (1).

Aristote, plutôt vulgarisateur et commentateur en mathématiques, donnera dans son traité *Du ciel* des raisons inattendues pour l'explication de l'univers. « Le ciel, écrit-il, doit être nécessairement sphérique, parce que la sphère étant engendrée par la rotation du cercle, est de tous les corps le plus parfait. »

Saint Anselme, le philosophe théologien du XI^e^ siècle, qui posait la nécessité de croire pour comprendre, n'en emploie pas moins la méthode géométrique, logique, en tout cas, en matière de théologie scolastique. En fait, à son époque la philosophie comprenait l'arithmétique, la musique, la géométrie, l'astronomie, donc le *quadrivium* des sciences. C'est lui qui invente, dans son *Monologium*, la preuve « ontologique » de l'existence de Dieu, que *saint Thomas d'Aquin* d'abord et *Descartes* ensuite reprendront plus tard. Voici en substance en quoi elle consiste, mise sous forme syllogistique. Nous avons l'idée d'un être parfait; or la perfection absolue implique l'existence; donc l'être parfait existe.

François Bacon, grand chancelier d'Angleterre, soutenait cette opinion : « Les physiciens doivent savoir que leur science

(1) Ces cinq polyèdres étaient pour les Anciens, les pythagoriciens surtout, les figures du κόσμος, du monde. Pour le pythagoricien *Timée*, justement, le tétraèdre symbolisait le feu ; l'hexaèdre, la terre ; l'octaèdre, le vent ; le dodécaèdre, l'enveloppe du monde ; l'icosaèdre, l'eau. D'ailleurs chez *Thalès*, le Milésien, l'eau était l'élément par excellence.

Hosted by Google

est impuissante s'ils n'y appliquent le pouvoir des mathématiques. » Pourtant *Bacon* fut loin d'être un pur mathématicien, lui qui prôna l'application, qui vit dans l'art de faire des expériences la « reine de toutes les sciences et le but de toute spéculation » : *domina scientarum omnium et finis totius speculationis*.

Képler a renchéri, comme on se souvient, sur les solides de Platon et il a exagéré les idées géométriques quasi-théologiques des premiers penseurs de l'antiquité grecque avec sa croyance des astres animés, ayant une âme, veux-je dire. « Cette âme, aventure-t-il, a le sentiment des raisons et des proportions géométriques ; c'est ainsi que la terre peut apprécier les distances, évaluer les angles et reconnaître s'ils sont harmoniques ou incongrus. »... !!

Chez *Pascal*, le grand penseur, les images mathématiques abondent. Vous connaissez sa pensée favorite : « Nous voyons par expérience qu'entre esprits égaux, et toutes choses pareilles, celui qui a de la géométrie l'emporte et acquiert une vigueur toute nouvelle. » Il préfère de beaucoup la géométrie à la logique qui lui emprunte ses règles sans beaucoup de discernement. « La méthode de ne point errer, dira-t-il, est recherchée de tout le monde. Les logiciens font profession d'y conduire, les géomètres seuls y arrivent, et hors de leur science il n'y a point de démonstration. » Enfin, *Pascal* qui est profondément religieux, ne l'oubliez pas, et qui a lu *Montaigne*, « le *Thalès* français », comme on l'a appelé en le plaçant le premier en date des philosophes français, s'exprimera sensiblement comme ce dernier, quand, pour donner une idée de la grandeur infinie de Dieu, il écrira à propos du monde visible : « c'est une sphère dont le centre est partout, la circonférence — la surface, veut-il dire — nulle part. »

Descartes avoue qu'il « se plaisait aux mathématiques à cause de la certitude et de l'évidence de leurs raisons ». D'autre part, il regarde d'un œil plutôt sceptique la philosophie enseignée de son temps, savoir cette philosophie scolastique trop entichée encore de celle d'*Aristote* et que *Boèce* en particulier avait trans-

Hosted by Google

mise à l'Occident latin. Aussi, empruntera-t-il sans sourciller, aux mathématiques, sa méthode universelle, méthode déductive qui doit lui conférer la certitude et qu'il portera en physique d'abord, en philosophie ensuite. Un des effets bienfaisants de la méthode mathématique sera de pouvoir analyser méthodiquement nos jugements, et elle apprendra, d'après sa propre expression, « à conduire par ordre nos pensées ». Détail curieux : il aurait enseigné les sciences abstraites à un de ses domestiques.

Le Hollandais *Spinoza* (1) continue *Descartes* et l'exagère, surtout par la puérilité de sa forme. *Leibniz* du reste, définissait plus tard le spinozisme : un « cartésianisme immodéré ».

Dans son *Ethique,* il dispose l'enchaînement de ses jugements philosophiques en théorèmes et corollaires. Il avait écrit en outre un ouvrage dont voici le titre : *Les deux premières parties des principes de Descartes démontrées géométriquement.* Vous vous rappelez enfin les quelques axiomes métaphysiques que nous avons eu l'occasion de citer de lui.

Malebranche, un autre cartésien, mais plus libre de doctrine que *Spinoza* et par-dessus le marché, grand écrivain, formulera : « Les lignes et les figures de la géométrie sont très propres pour représenter à l'imagination les rapports qui sont entre les grandeurs, ou entre les choses qui diffèrent du plus ou du moins, comme les espaces, les temps, les poids... » Quant à l'algèbre, considérée par lui comme une sorte d'arithmétique généralisée, débarrassée de ses chiffres, il en dira : « Elle apprend à faire sur les grandeurs littérales tous les calculs qui servent à déduire les rapports les plus difficiles et les plus composés qu'on puisse désirer de savoir, des mêmes grandeurs qui sont déjà connues. »

Newton n'est pas à proprement parler un philosophe. Son système, le *newtonisme* qui eut tant de retentissement, tant d'influence sur la pensée de *Kant,* entre autres, doit être tenu pour un système de physique plutôt que de métaphysique. Il se rapporte aux causes du mouvement des corps célestes et l'*attrac-*

(1) On commence à écrire *Spinosa* au lieu de *Spinoza*, tout comme on a changé l'orthographe ancienne de *Leibnitz* en celle de *Leibniz*.

Hosted by Google

tion (que *Leibniz* critiquait en la rapprochant des qualités occultes du Moyen âge) en est la base. Son ouvrage fameux, les *Principia* ou plus complètement : *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, renferme outre des éléments mathématiques essentiels pour établir sa « philosophie naturelle », je veux dire sa physique, quelques règles hypothétiques, qu'on a rapprochées de celles de *Descartes* et qui sont des règles de philosophie, *regulæ philosophandi*. En voici une : les effets de même espèce ont les mêmes causes. Vers la fin de sa vie, ce grand esprit s'est affaibli et s'écartant de son propre système, il en recherche des causes théologiques. « Cet admirable arrangement du soleil, des planètes et des comètes, pensera-t-il, ne peut être que l'ouvrage d'un être tout-puissant et intelligent. » Nous sommes loin de la période féconde où son génie n'avait pas besoin d' « imaginer des hypothèses » : *hypotheses non fingo* !

Leibniz, partisan, comme *Descartes*, d'une mathématique universelle : *mathesis universalis*, porte comme lui une méthode mathématique, mais plus avertie et plus complète, dans sa philosophie. Il s'imagine qu'en métaphysique et même en morale, l'on pourrait écrire en mathématicien, c'est-à-dire avec rigueur. « Il y a de la géométrie partout », énonce-t-il. Sa croyance est en somme que sans les mathématiques, on ne pénètre point au fond de la philosophie ; sans la philosophie, on ne pénètre point au fond des mathématiques ; sans les deux, on ne pénètre au fond de rien.

Condillac s'attache plutôt à la forme qu'au fond. En digne père d'un de ses livres, *la Langue des calculs*, il émet : « L'algèbre est une langue bien faite et c'est la seule ; la simplicité du style en fait toute l'élégance. »

Kant, dont le faible bagage scientifique, surtout mathématique, ne souffre aucune comparaison avec celui de *Descartes* ou celui de *Leibniz*, se souvient de temps à autre, au cours de ses profondes spéculations métaphysiques, qu'il a enseigné les mathématiques élémentaires, et il signalera par exemple que seul le concept de

Hosted by Google

quantité peut être envisagé *a priori* par l'esprit. Il distinguera l'arithmétique, en tant que science du temps, le temps étant la forme pure, *a priori*, du « sens interne », presque synonyme chez lui d'entendement ; et la géométrie, en tant que science de l'espace, l'espace étant la forme *a priori* du « sens externe », à savoir de la connaissance sensible.

Cette distinction, nous la retrouverons de nos jours, avec certains mathématiciens purs, à la doctrine « arithmétisante », et nous avons eu l'occasion de dire déjà comment *Helmholtz* substituait à la conception « cardinale » du nombre entier, où un pareil nombre résulte de la considération d'un groupe d'unités, la conception « ordinale », où ce nombre se rapporte à la succession, dans le temps, de phénomènes déterminés. Mais *Gauss*, lui-même, n'envisageait-il pas le nombre comme un pur produit de l'esprit, tandis qu'il attribuait à l'espace une réalité, en dehors de l'esprit ?

Schopenhauer, le philosophe allemand du début du XIX^e^ siècle, qui étudia les conditions de la vie aux lumières d'une analyse pessimiste, pour ainsi parler, pense sans doute que la démonstration complique la vie des êtres géométriques quand, à propos du souci d'*Euclide* de prouver qu'un triangle est isoscèle dès qu'il est équiangle, il émet ce jugement (1) :

« La méthode d'*Euclide* n'est qu'une brillante absurdité. Dès le commencement, il aurait dû montrer comment dans le triangle les angles et les côtés se déterminent réciproquement et sont cause et effet les uns des autres selon la forme que revêt le *principe de raison* dans l'espace pur, forme qui, là comme partout, crée la nécessité qu'une chose soit telle qu'elle est. Au lieu de nous donner ainsi une aperception complète de la nature du triangle, il établit quelques propositions détachées, choisies arbitrairement, et en donne un principe de connaissance logique par une démonstration fatigante, basée logiquement sur le *principe de contradiction*. »

(1) Cf. le chapitre du « principe de raison suffisante » dans son ouvrage : *Le Monde comme volonté et comme représentation*.

Hosted by Google

Auguste Comte, au début de son *Cours de philosophie positive*, quand il s'agit de la classification des sciences, oublie intentionnellement — il veut ménager son effet — la mathématique. Mais aussitôt il ajoutera : « Le motif de cette omission volontaire est dans l'importance même de cette science, si vaste et si fondamentale. » Et désormais il la classe à la tête de la philosophie positive : une philosophie plus rationnelle, plus scientifique que la philosophie naturelle de *Newton*, présentera-t-il. C'est cette philosophie, nommée de préférence actuellement *philosophie positiviste*, que représentèrent brillamment *Claude Bernard*, au siècle dernier, et BERTHELOT jusqu'au commencement de notre siècle. Vous connaissez l'aversion d'*Auguste Comte* pour tout ce qui lui paraît toucher de près ou de loin à la métaphysique. Aussi refusera-t-il même à la logique une existence distincte des sciences. Au contraire, *Herbert Spencer*, le philosophe anglais, le principal représentant de l'*évolutionnisme* — il vivait encore au début du siècle actuel —, donne dans sa « Classification des sciences » la première place à la logique, avant la mathématique. Bien entendu, il les classe simultanément dans le même groupe, celui des sciences *abstraites*, qui « traitent des formes sous lesquelles les phénomènes nous apparaissent » et non des phénomènes eux-mêmes, qui à leur tour seront étudiés par les sciences *abstraites-concrètes* ou *concrètes* simplement.

Vous avez sans doute remarqué que nous nous sommes toujours abstenu d'attacher beaucoup d'importance aux classifications scientifiques en général, mathématiques en particulier, et vous comprenez pourquoi, par certaines critiques sur le peu de netteté du classement des branches fondamentales des sciences abstraites, nous nous sommes imposé une pareille réserve. Il vous suffira de savoir que l'astronome mathématicien GEMINUS, un peu avant notre ère, s'occupe le premier du classement philosophique des mathématiques. D'après son commentateur *Proclus*, il distinguait la science qui traite des choses « intelligibles » comprenant l'arithmétique et la géométrie, de celle qui étudie les choses « sensibles » constituée par la mécanique, l'astrologie, l'op-

Hosted by Google

tique, la géodésie, la canonique (ou étude d'acoustique musicale) et enfin la logistique (au sens où la comprenaient les Grecs).

A la vérité, les classifications scientifiques, utiles en quelque mesure, restent essentiellement variables et personnelles à chaque auteur. A ce sujet, nous serions assez de l'avis de *Buffon* écartant toute classification naturelle et voyant une sorte de continuité dans l'échelle des êtres vivants, en reconnaissant à notre tour une espèce de complexité continuellement croissante pour les êtres simplement possibles, ceux du monde mathématique. Aussi ne signalerons-nous pas *Ampère* pour sa classification des sciences trop touffue quoique suffisamment originale, mais bien pour son esprit critique, manifesté dans son ouvrage *Essai sur la philosophie des sciences*, où il écrit entre autres choses : « C'est par les sciences mathématiques qu'il convient de commencer la série des connaissances humaines, parce que ce sont elles qui exigent pour point de départ et qui ont pour objet un plus petit nombre d'idées. De plus, on peut étudier les vérités dont elles se composent sans recourir aux autres branches de nos connaissances, et celles-ci leur empruntent, au contraire, de nombreux secours. »

Jusqu'ici nous avons, à peu près exclusivement, trouvé un accord constant entre la Mathématique et la Philosophie. Pourtant *Auguste Comte* ne laisse pas passer une occasion sans combattre la métaphysique. « Laissons de côté les causes », dit-il, dans le domaine réel, il est vrai d'ajouter. Mais surtout *Stuart Mill*, lequel par horreur du dogmatisme penchait volontiers vers le scepticisme et versait presque dans le paradoxe, a jeté dans cette harmonie une note discordante. Il a cru devoir émettre l'opinion que voici : « L'insuffisance philosophique des mathématiciens se révèle d'une manière éclatante dans les pauvretés qu'ils débitent sur les généralités de leur propre science. »

Cette opinion, *Mill* ne pourrait honnêtement plus la soutenir à notre époque de logique, j'allais dire : de psychologie mathématique. Peut-être se réservait-il le loisir de devenir lui-même mathématicien, pour enrichir d'une « manière éclatante » les principes de sa « propre science » désormais ! En tout cas, il ne

Hosted by Google

semble guère avoir amplement médité sur une pensée de l'auteur des *Lettres à une princesse d'Allemagne sur quelques sujets de physique et de philosophie*, le grand analyste et logicien du XVIII^e^ siècle, *Euler*. « Il est toujours extrêmement difficile, pensait *Euler*, de raisonner sur les premiers principes de nos connaissances, et nous sommes plutôt destinés à nous servir de nos facultés qu'à en approfondir la nature. »

Descartes, dont l'esprit était radicalement l'opposé de celui de *Mill* entre parenthèses, avait émis, à son tour : « Je remarque que presque tous ceux qui conçoivent aisément les choses qui appartiennent aux mathématiques ne sont nullement propres à entendre celles qui se rapportent à la métaphysique, et au contraire que ceux à qui celles-ci sont aisées ne peuvent comprendre les autres. » Il sera bon d'observer toutefois que cette phrase est sujette à caution, si l'on songe que *Descartes* l'écrivit dans la dédicace de son ouvrage *Principes de la philosophie*, destiné à une princesse savante, la princesse Elisabeth de Bavière à qui il accordait galamment une égale compréhension, malgré tout, de la mathématique et de la métaphysique. Mais n'a-t-il pas dit, par ailleurs, que « les géomètres, entre tous les hommes, se sont le plus étudiés à concevoir bien distinctement les choses qu'ils ont considérées » ?

Sans être aussi enthousiaste que *Pascal*, pour qui la science exacte était « le plus haut exercice de l'intelligence », et qui plaçait les mathématiciens au premier rang des « princes de l'esprit », nous ne craindrons pas néanmoins d'assurer que les mathématiques, loin d' « affadir l'esprit » ou de « dessécher le cœur », comme on a osé les en accuser injustement, peuvent leur donner maintes fois une vigueur nouvelle sous les espèces de la vérité. Et l'on comprendra sans peine que nous n'ayons pas les mêmes raisons pour les proscrire qu'un Bossuet, reprochant simplement à la géométrie d'être, de par ses spéculations, inutile à la théologie, ou qu'un Fénelon donnant expressément ce conseil « de ne point se laisser ensorceler par les attraits

Hosted by Google

diaboliques de la géométrie, qui éteindraient l'esprit de la grâce ».

La culture scientifique peut et doit aller de pair avec la culture littéraire. La Mathématique ne s'oppose même pas à la Poésie. *Descartes* n'avait-il pas un certain penchant pour la poésie, dont il était « amoureux », avouait-il ? Ses derniers écrits sont des vers en l'honneur de la paix de Munster. *Fontenelle*, l'étonnant centenaire, qui s'occupa avec autorité de la question de l'infini mathématique, et qui faisait de la science un instrument d'émancipation de la conscience, n'a-t-il pas, au cours de sa longue carrière littéraire, écrit des opéras, composé des tragédies, rimé des pastorales ? *Ampère*, à l'âme tendre, rêvant d'une langue universelle destinée à rapprocher les hommes, s'adonnait à la science et à la poésie pour apaiser la douleur que venait de lui occasionner la mort de son père, monté sur l'échafaud révolutionnaire. *Victor Hugo* cultiva un temps les mathématiques avant de briller dans la poésie. Certains de ses vers en témoignent; par exemple ceux-ci, qui ont dû paraître plutôt symboliques à des lecteurs de culture exclusivement littéraire :

> Géométrie, Algèbre, Arithmétique ! Zone
> Où l'invisible plan coupe le vague cône,
> Où l'asymptote cherche, où l'hyperbole fuit !

Enfin *Sully Prudhomme* dont la mort toute récente vient de nous enlever un grand poète et un philosophe pénétrant, et qui reçut une éducation à la fois scientifique et philosophique, déclarait que les « géomètres sont heureux » parce que leurs créations sont durables. Les recommandations qu'il faisait à la jeunesse sauront-elles être entendues ? « Je vous supplie tous, disait-il, même les plus sérieux d'entre vous, ceux dont les études sont les plus ardues, les plus positives, de ne jamais répudier la poésie, votre alliée naturelle. »

Et sans insister, plus qu'il ne conviendrait ici, sur le nombre considéré comme source de toute rythmique, sur l'idée de l'Infini

Hosted by Google

devenue familière à toute poésie, je terminerai cette leçon, la dernière de nos spéculations générales sur la vérité mathématique, par cette poétique pensée de *Newton*, de *Newton* « qui surpassa le genre humain par l'esprit » (1) : « Il me semble que je n'ai été qu'un enfant jouant sur le bord de la mer et trouvant, tantôt un caillou plus poli, tantôt un coquillage plus joli que les autres, tandis que le vaste océan de la Vérité s'étendait inexploré devant moi. »

(1) Nous avons relevé cette inscription ou mieux l'inscription latine équivalente : *qui genus humanum ingenio superavit*, sur le socle d'une statue de *Newton*, dans une des salles de l'Université de Cambridge (le monument le plus connu du grand homme est à Westminster Abbey, à Londres). On pourra la rapprocher de l'inscription latine : *majestati naturæ par ingenium*, « esprit égal à la majesté de la nature », se rapportant à une statue de *Buffon*, en France.

Hosted by Google

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

Introduction 1

1re Leçon. — Méthode objective, méthode subjective . . . 1
Critique. 6
Histoire 7

2e Leçon. — Déduction, principe d'identité, rôle de l'induction, principe d'induction complète . . . 11

3e Leçon (Suite de la précédente) 21
Critique et histoire 21
Digression historique sur le principe d'induction complète 37

4e Leçon. — Nature des démonstrations, mécanisme du raisonnement mathématique. 39
I. — Digression sur la loi de réciprocité en géométrie 47
II. — Digression sur la loi d'homogénéité des relations métriques 49
III. — Digression sur les lieux géométriques. 51

5e Leçon (Suite de la précédente). 54
Critique et histoire. 54
Digression sur la loi de substitution des équivalents. 64

6e Leçon. — Des définitions en mathématique. 67
Critique et histoire. 73
Digression sur la réciprocité en mathématiques 78

7e Leçon. — Des axiomes et des postulats en mathématique et en philosophie. 83
Critique et histoire 83
Digression historique sur les géométries non-euclidiennes 91

Hosted by Google

Pages.

8e Leçon. — De l'idée du nombre entier en mathématique et en philosophie. Notion du zéro 94

9e Leçon (Suite de la précédente) 104
Critique et histoire du nombre 104

10e Leçon. — De l'infini en mathématique et en philosophie. 114
Digression sur le procédé par exhaustion. . 128

11e Leçon (Suite de la précédente). 128
Critique et histoire de l'infini mathématique et métaphysique 131

12e Leçon. — De la rigueur mathématique 145
Critique et histoire. 154

13e Leçon. — La Mathématique et la Philosophie. 164
Critique et histoire. 166

14e Leçon. (Suite de la précédente). 179
Digression critique et historique. 184

15e Leçon. — La Mathématique et la Philosophie (suite et fin). 190

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet, Facdoubl, Directeur.

Hosted by Google

Librairie VUIBERT et NONY, 63, boul[d] Saint-Germain, PARIS 5[e].

ANNUAIRE DE LA JEUNESSE, *Moyens de s'instruire, Choix d'une carrière*, par H. VUIBERT (19e année). — Un vol. 18/12cm de 1143 pages, broché . . . . . 3 fr. 50
cartonné toile rouge . . . . . 4 fr. 50
Cet ouvrage est appelé à être entre les mains de tous les jeunes gens de dix à vingt-cinq ans et de tous les pères de famille soucieux de l'éducation et de l'avenir de leurs enfants.

Loi militaire du 21 mars 1905 (Service de deux ans) et engagements et rengagements dans l'armée de mer . . . . . 0 fr. 30
Engagements volontaires dans les troupes métropolitaines. — Décret du 27 juin 1905 . . . . . 0 fr. 30
Aptitude physique au service militaire. — Instruction du 22 octobre 1905. . . . . 0 fr. 50

Les Cinq Langues Journal d'enseignement des langues (**Allemande, Anglaise, Espagnole, Française et Italienne**). Revue bimensuelle illustrée de 48 pages 25/16cm.

ABONNEMENTS A	1 langue	2 langues	3 langues	5 langues
France.	3 fr. 50	5 fr. »	6 fr. 50	8 fr. »
Etranger	4 fr. 50	6 fr. »	7 fr. 50	10 fr. »

Lectures scientifiques :

Chaque volume 22 × 14 cm., broché. . . 5 fr. »
Relié genre amateur, dos et coins percaline. 6 fr. 50
Relié amateur, dos et coins maroquin . . . 8 fr. 50

LA VIE ET LES TRAVAUX DES SAVANTS MODERNES. — *2e édition* revue et augmentée par E. GOURSAT, professeur à la Sorbonne. Un volume orné de 400 portraits.

PAGES CHOISIES DES SAVANTS MODERNES. — Un vol. de 624 pages, orné de 39 portraits.

MATHÉMATIQUES ET MATHÉMATICIENS. — *3e édition*. Un beau volume de 566 pages.

LES FEMMES DANS LA SCIENCE. — *2e édition*. Volume orné de portraits, autographes et fac-similés.

RÉCRÉATIONS ARITHMÉTIQUES. (3e édition). — Volume 22/14cm illustré, broché . . . . . 3 fr. 50
Relié . . . . . 5 fr. »

CURIOSITÉS GÉOMÉTRIQUES. — Vol 22/14cm, illustré. —
Broché. . . . . 5 fr. »
Relié . . . . . 6 fr. 50
Les lecteurs trouveront dans ces deux volumes les questions les plus propres à piquer leur curiosité ; une foule de problèmes curieux, anciens et modernes, y sont réunis, présentant la science mathématique sous une forme récréative.

Cours, Traités et Recueils de Problèmes et Exercices

de Mathématiques, Physique, Chimie, Sciences naturelles, à l'usage des élèves de l'enseignement secondaire et des candidats au baccalauréat et aux écoles (Voir le catalogue qui est envoyé franco sur demande).

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, FACDOUEL, dir.

Hosted by Google

Librairie VUIBERT et NONY, 63, boul[d] Saint-Germain, PARIS, 5[e].

Vient de paraître :

PRINCIPES DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (*Essai sur les*) par Louis Delègue, lieutenant d'artillerie. — Volume 22/14[cm] de 134 pages. 4 fr. »

« Déterminer d'une manière très précise les concepts fondamentaux des sciences mathématiques, déduire de ces définitions premières tout ce qu'elles contiennent (en particulier pour la géométrie les propositions, ordinairement considérées comme axiomes, énonçant les propriétés de la droite), tel est le but de ce travail. Les géométries non euclidiennes apparaîtront alors comme des déductions légitimes puisque non contradictoires, mais dont il y aura lieu de chercher l'interprétation, c'est-à-dire l'intuition cachée derrière leurs vocables, qui, homonymes des termes euclidiens, n'ont pas la même signification qu'eux. »

(*Extrait de l'Avant-propos.*)

ÉLÉMENTS DE MÉTHODOLOGIE MATHÉMATIQUE (Arithmétique, Algèbre, Géométrie), par M. Dauzat, inspecteur d'Académie. — Vol. 22/14[cm] de 1100 pages, 10 fr. ; relié . . . . . 12 fr. »

Cet ouvrage comprend :

1° des Considérations générales sur les mathématiques élémentaires et leur enseignement ;

2° un Résumé raisonné des Théories arithmétiques, algébriques et géométriques ;

3° un Exposé des Méthodes et des procédés de démonstration et de résolution des questions élémentaires de mathématiques ;

4° l'application de ces méthodes à l'étude de plus de 500 questions.

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES à l'usage des ingénieurs, des physiciens, des chimistes, des jeunes gens qui se destinent à ces carrières et des élèves des Facultés des sciences, par H. Vogt, professeur à l'Université de Nancy. — *4[e] édition, très augmentée et entièrement refondue.* Vol. 25/16[cm], avec figures . . . . . 12 fr. »

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES (*Edition réduite du volume précédent*) à l'usage des chimistes et des élèves des écoles industrielles. — Vol. 25/16[cm] . . . . . 7 fr. »

L'Éducation mathématique journal (format 28/22[cm]) à l'usage des classes de lettres, paraissant le 1[er] et le 15 de chaque mois et publié par André Durand, ancien élève de l'Ecole normale, professeur agrégé au lycée Saint-Louis, et H. Vuibert, rédacteur du *Journal de Mathématiques élémentaires.* — Abonnement annuel : **5** francs.

Journal de Mathématiques élémentaires *publié* par H. Vuibert (*33[e] année*), format 28/22[cm] avec figures et épures dans le texte, paraissant le 1[er] et le 15 de chaque mois, du 1[er] octobre au 15 juillet.

Abonnement annuel : 5 francs. (On envoie à toute époque de l'année les numéros parus depuis le 1[er] octobre précédent.)

Revue de Mathématiques spéciales (*19[e] année*), paraissant tous les mois par numéros de 24 ou 32 pages de 28/22[cm] avec figures et épures dans le texte. — Abonnement annuel partant d'octobre : France, 10 francs. Etranger, 11 francs.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet, Facdouel, dir.

Hosted by Google